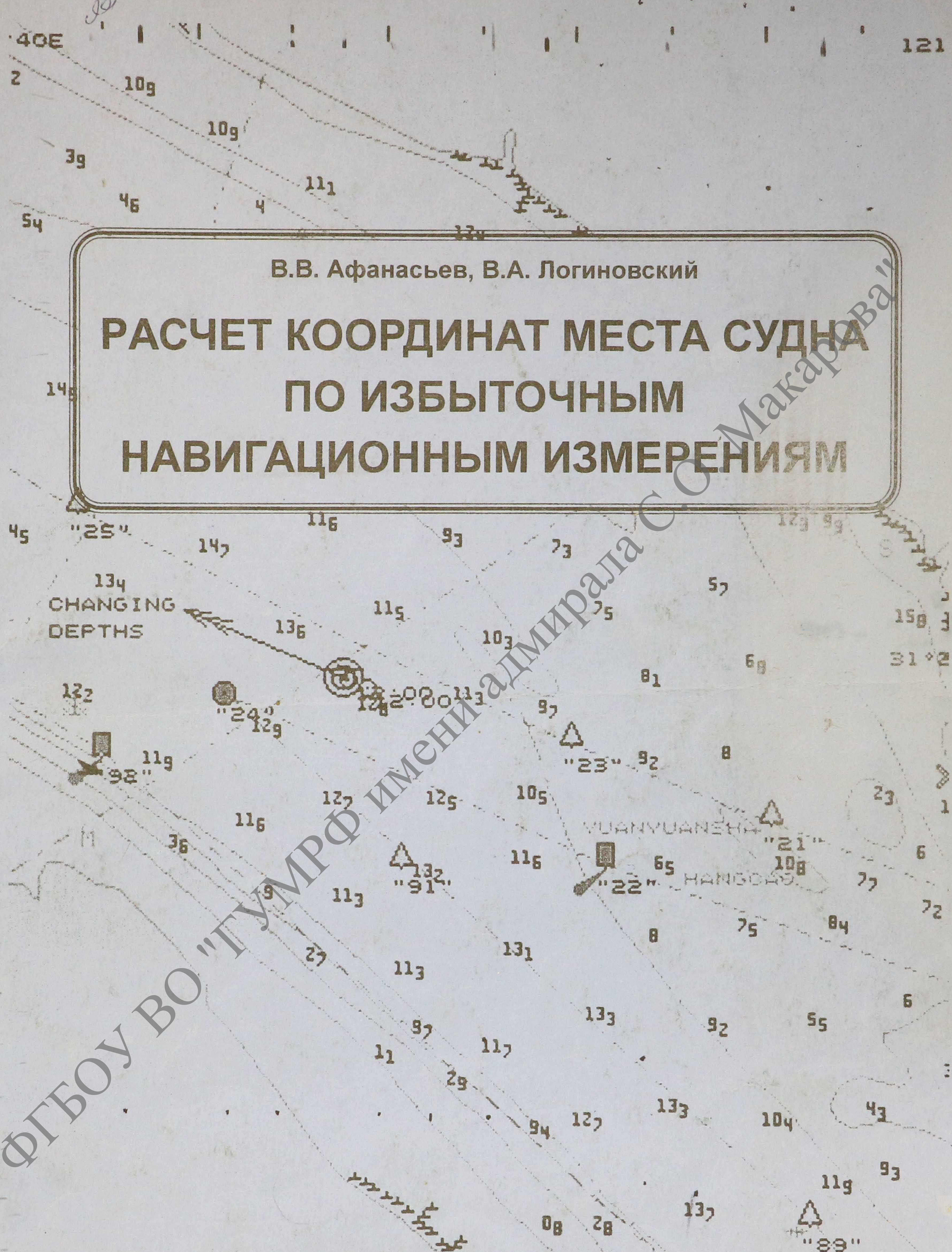
В.В. Афанасьев, В.А. Логиновский

РАСЧЕТ КООРДИНАТ МЕСТА СУДНА ПО ИЗБЫТОЧНЫМ НАВИГАЦИОННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ



Санкт-Петербург
2004

Uk = Mk+d Uk - ΔMk = kp -

Министерство транспорта Российской Федерации

Федеральное государственное образовательное учреждение
ГОСУДАРСТВЕННАЯ МОРСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени адмирала С.О. Макарова

КАФЕДРА СУДОВОЖДЕНИЯ

В.В. Афанасьев, В.А. Логиновский

Расчет координат места судна по избыточным навигационным измерениям

Учебное пособие
по математическим основам судовождения

Изд. 2-е, испр.

Санкт-Петербург
2004

УДК 656.61.052:527:62
ББК 39.471.1
А94

Афанасьев В.В., Логиновский В.А.
А94 Расчет координат места судна по избыточным навигационным измерениям: Учеб. пособие по математическим основам судовождения. – Изд. 2-е, испр. – СПб.: ГМА им. адм. С.О. Макарова, 2004. – 40 с.

В учебном пособии рассмотрены теоретические основы определения места судна и линейные методы расчета координат. Дано разъяснение таких основных понятий, как навигационная функция, навигационный параметр, навигационная изолиния, градиент навигационной функции. Изложены вопросы линеаризации навигационных функций, рассмотрены аналитические и графоаналитические методы расчета координат.

Предназначено для курсантов 3-го курса очного и студентов заочного обучения судоводительского факультета.

Рекомендовано к изданию на заседании кафедры судовождения. Протокол № 9 от 30 апреля 2002 г.

Рецензенты:
Трегубов В.С., ст. науч. сотр. (ГосНИНГИ);
Брусенцов В.П., канд. техн. наук, доц. (Государственная морская академия им. адм. С.О. Макарова).

Введение

Определение координат места судна и оценка их точности являются основными задачами морской навигации. Точное знание координат места судна определяет уровень безопасности плавания и существенно влияет на экономические показатели его работы. В настоящее время задачи определения места решаются как с помощью методов классической навигации, так и автоматизированными средствами, наиболее популярными из которых являются спутниковые навигационные системы. Для повышения точности и надежности определения координат измеряется избыточное число навигационных или радионавигационных параметров. Современные многочисленные алгоритмы расчета координат и оценки их точности по измеренным параметрам строятся на базе классических методов линейной алгебры, основой которых является *метод наименьших квадратов* (МНК). Линеаризация навигационных функций позволяет построить универсальные и однозначные алгоритмы расчета координат, независимо от измеряемого параметра. Для современного изложения МНК используется математический аппарат матричного исчисления.

Грамотное использование навигационной техники требует от судоводителя знания и понимания как физических, так и математических процессов обработки измеренной информации.

Учебное пособие предназначено для изучения вопросов расчета координаты места судна при избыточных измерениях.

Целью курсовой работы на тему «Расчет координат места судна по избыточным навигационным измерениям» по дисциплине «Математические основы судовождения» (МОС) является изучение основ теории навигационных функций и линейных методов обработки навигационной информации, включая классический вариант с применением современного матричного исчисления.

Работа выполняется на листах бумаги формата А4 и включает две части: теоретическую и расчетную.

Содержание курсовой работы приведено в прил. 1, образец титульного листа дан в прил. 2.

В конце курсовой работы необходимо оставить два чистых листа формата А4, которые будут использоваться при защите.

Вычисления в курсовой работе выполняются с полной разрядной сеткой калькулятора. Если расчет был произведен на компьютере, то при защите работы необходимо показать умение применять использованное программное обеспечение.

1

Теоретические основы определения места судна

Глава содержит определения навигационного параметра, навигационной функции, градиента навигационной функции, навигационной изолинии и описания их использования для расчета координат места судна.

1.1. Общие сведения

Счисление пути судна с помощью автономных средств навигации (лаг, гирокомпас), кроме важного преимущества, которое заключается в автономности определения *счислимых координат*, обладает и существенными недостатками. Эти недостатки характеризуются погрешностями курсоуказателей (компасов) и относительных измерителей скорости (лагов). На показания лагов влияют гидрометеорологические факторы (ветер, волнение, течение, качка). Погрешности счисления растут во времени, снижая точность счислимых координат. Для их компенсации применяют внешние измерения, на точность которых указанные факторы влияния не оказывают. С помощью таких измерений можно получить координаты места судна, которые называются *обсервованными*, а сама процедура получения координат называется *обсервацией*. Таким образом, координаты места судна могут быть *счислимыми* и *обсервованными*. В большинстве случаев обсервованные координаты точнее счислимых, хотя бывает и наоборот.

Для определения обсервованных координат с помощью различных навигационных средств измеряются *навигационные параметры* (НП).

НП – это линейные или угловые величины, определяющие положение объекта относительно ориентира.

Наиболее распространенными являются следующие навигационные параметры.

- Дистанция до ориентира – D.
- Пеленг на ориентир – П. Здесь под пеленгом понимается истинный пеленг (ИП). Далее для упрощения записей он будет обозначаться буквой П.
- Горизонтальный угол между двумя ориентирами – α.
- Вертикальный угол ориентира – β.
- Разность расстояний до двух ориентиров – ΔD.
- Высота светила – h.

Множество НП образует скалярное поле этих параметров на поверхности Земли, и поскольку координаты навигационных ориентиров известны, то множество значений НП определяют *навигационную функцию* (НФ), т.е. зависимость НП от координат места судна.

НФ – это математическая зависимость НП от координат места судна и координат ориентиров.

Именно эта функциональная математическая зависимость и позволяет решить задачу определения места судна (ОМС). Навигационные ориентиры являются обычно точечными.

В практике морской навигации НП обозначается буквой U, и тогда выражение для навигационной функции в общем виде может быть записано:

$$U=f(\varphi, \lambda), \tag{1.1}$$

или в локальной системе координат –

$$U=f(x, y). \tag{1.2}$$

Если же зафиксировать навигационный параметр $U=U_0$=const, то получим *уравнение навигационной изолинии* (НИ):

$$U_0=f(\varphi, \lambda)=\text{const}. \tag{1.3}$$

НИ – это геометрическое место точек равных значений навигационных параметров.

Важнейшей характеристикой навигационной функции (рис 1.1) является ее *вектор-градиент* **g**, который характеризует максимальную скорость изменения навигационной функции (скорость изменения навигационного параметра в конкретной точке). НП меняется быстрее всего в направлении n, перпендикулярном касательной к навигационной изолинии в точке C. В данном случае говорят, что градиент направлен по нормали n к НИ. В качестве положительного направления градиента g условно принимается направление, соответствующее увеличению навигационного параметра U.

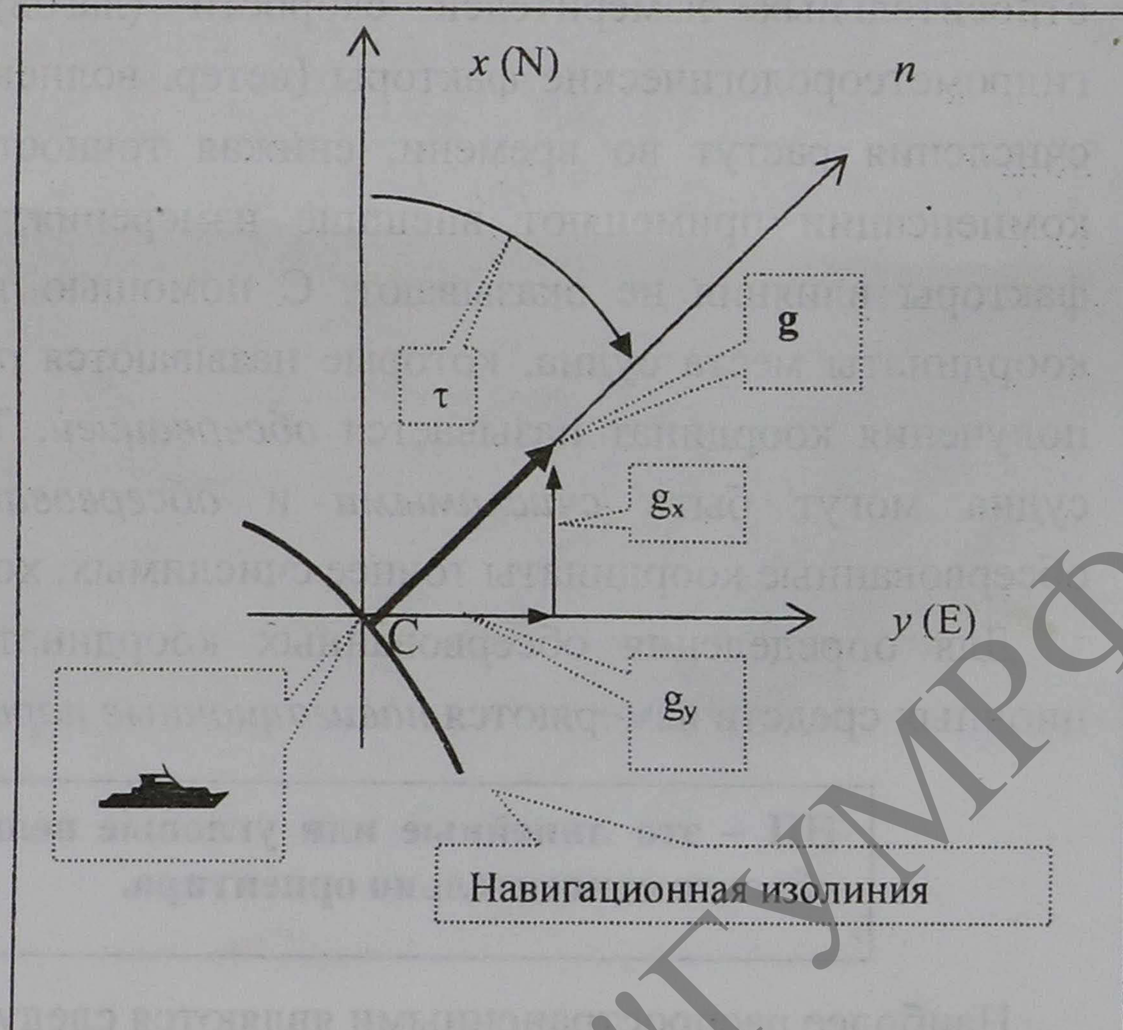


Рис.1.1. Градиент навигационной функции

Для вычисления этой скорости, т.е. модуля вектора градиента, необходимо вычислить производную от НФ по нормали n:

$$g=\frac{dU}{dn}. \tag{1.4}$$

Запишем формулы (1.5), (1.6) для расчета g (здесь **g** – обозначение вектора, а g – его модуля).

Градиент навигационной функции – это вектор максимальной скорости изменения НФ в конкретной точке поля навигационных параметров, который направлен по нормали к навигационной изолинии в сторону увеличения НП.

В локальной прямоугольной системе координат **g** может быть представлен в виде двухкомпонентного вектора следующим образом:

$$\mathbf{g}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial U}{\partial x}\\ \dfrac{\partial U}{\partial y}\end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

$y = x^c$

Тогда его модуль рассчитывается по теореме Пифагора:

$g_x = \frac{dU^2}{dx} = 2x$

$$g=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{g_x^2+g_y^2}, \tag{1.6}$$

$g_y = \frac{dy}{dy} = 0$

здесь g_x, g_y – проекции вектора **g** на координатные оси.

Направление вектора **g** определится следующим образом:

$$\tau=\operatorname{arctg}\left(\frac{g_y}{g_x}\right). \tag{1.7}$$

Пояснение формул (1.3) – (1.7) представлено на рис. 1.1.

1.2. Навигационная функция расстояния до ориентира на плоскости

Рассмотрим измерения навигационного параметра D, которым является расстояние до навигационного ориентира A, измеряемое дальномерными навигационными приборами. Одним из таких приборов является *радиолокационная станция* (РЛС).

С учетом практической точности решения навигационных задач на земной сфере (см. книгу [2]), плоскость в качестве локальной модели земной поверхности можно использовать на расстояниях до 120 миль от ориентира.

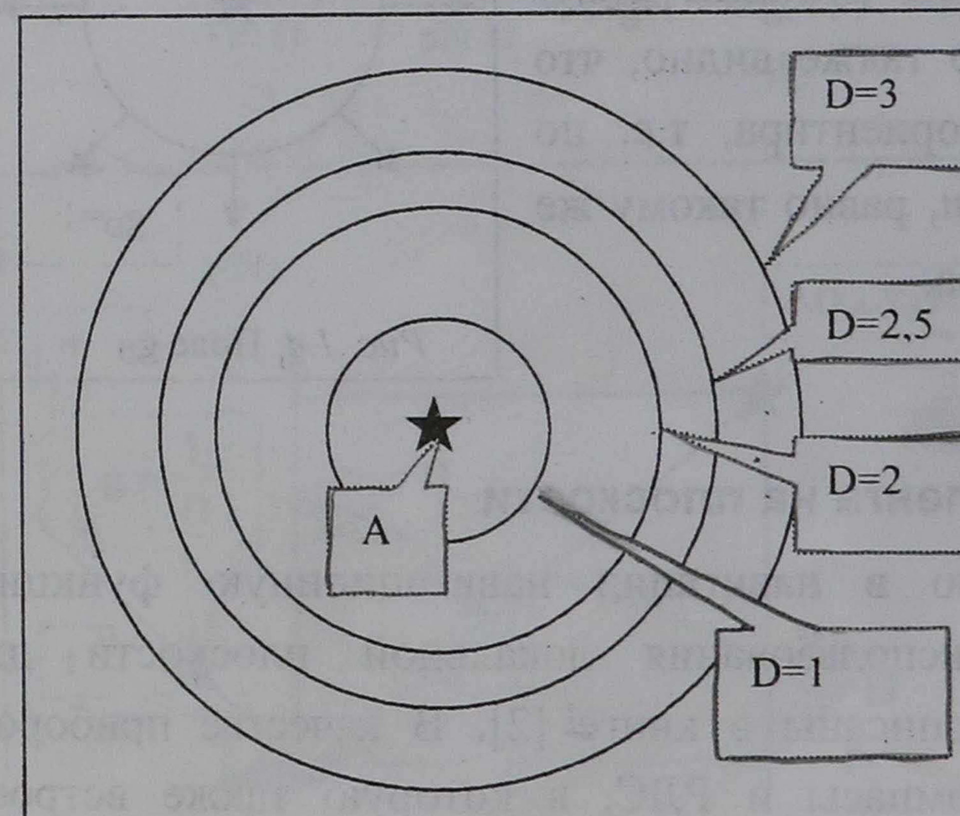


Рис. 1.2. Изолинии навигационной функции расстояния

На рис. 1.2 изображена навигационная функция расстояния $D(x,y)$ в виде поля навигационных изолиний, которые представляют на плоскости концентрические окружности радиусом D и с центром в точке расположения навигационного ориентира A. Эти окружности в морской навигации называются *изостадиями*.

Аналитическое выражение для навигационной функции на плоскости с началом координат в точке A (рис. 1.3) запишем в традиционном виде:

$$D=\sqrt{(x_A-x)^2+(y_A-y)^2}, \tag{1.8}$$

а для вычисления модуля и направления градиента расстояния g_D в счислимой точке C воспользуемся формулами (1.5) – (1.7):

$$\frac{\partial D}{\partial x} = \left[(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2\right]^{-0,5}(x_A - x) = -\cos П;$$

$$\frac{\partial D}{\partial y} = \left[(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2\right]^{-0,5}(y_A - y) = -\sin П;$$

$$g_D = \sqrt{(\cos П)^2 + (\sin П)^2} = 1; \qquad (1.9)$$

$$\tau_D = \mathrm{arctg}\left(\frac{y_A - y}{x_A - x}\right) = П \pm 180°.$$

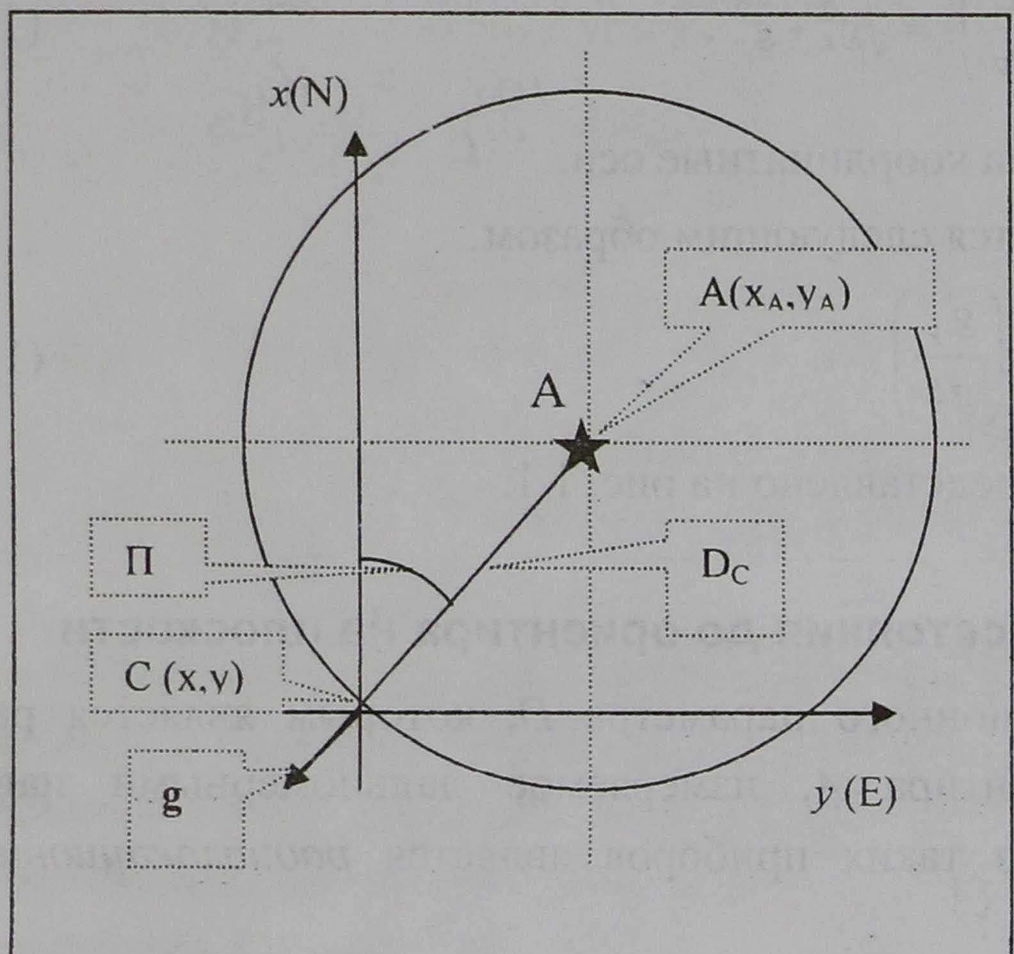


Рис. 1.3. Изолиния и градиент расстояния

Результаты вычислений по формулам (1.9) очевидны, что подтверждает их справедливость. Вычислительная модель адекватна реальной ситуации. Выражение в квадратных скобках – не что иное, как счислимое расстояние D_C от счислимой точки C до ориентира A. Модуль градиента расстояния безразмерен и направлен по линии пеленга П в сторону увеличения дистанции D. При определении τ_D знак «+» принимается, если П<180°, а знак «–», если П>180°.

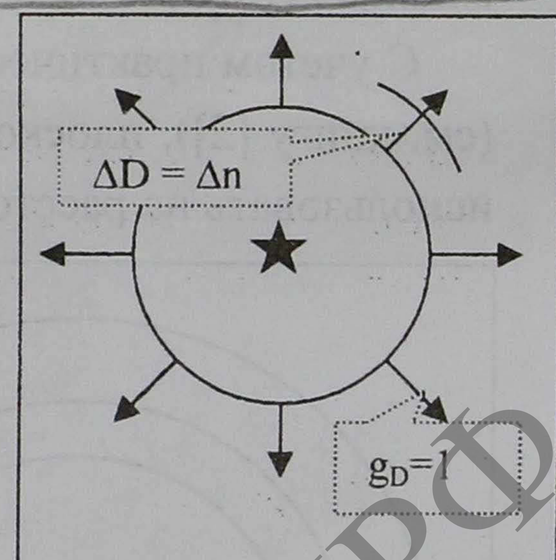


Рис. 1.4. Поле g_D

Иллюстрация векторного поля градиентов навигационной функции $D(x,y)$ представлена на рис. 1.4, из которого также видно, что перемещение по линии пеленга от ориентира, т.е. по нормали n к изостадии на величину Δn, равно такому же изменению расстояния ΔD до ориентира.

1.3. Навигационная функция пеленга на плоскости

Рассмотрим широко применяемую в навигации навигационную функцию пеленга на плоскости. Пределы использования локальной плоскости для моделирования земной поверхности описаны в книге [2]. В качестве приборов, измеряющих пеленг, используются компасы и РЛС, в которую также встроен *репитор* гирокомпаса.

На рис. 1.5 представлена графически функция пеленга в виде множества навигационных изолиний – линий пеленгов на навигационный ориентир A. При движении по такой изолинии пеленг на навигационный ориентир остается всегда постоянным.

Для вывода формулы градиента рассмотрим рис. 1.6 и запишем выражение для тангенса пеленга, а затем и для его навигационной функции:

$$\mathrm{tg}П = \frac{y_A - y}{x_A - x};$$

$$П = \mathrm{arctg}\,\frac{y_A - y}{x_A - x}. \qquad (1.10)$$

Для вычисления модуля и направления градиента расстояния $g_П$ в счислимой точке C вновь воспользуемся формулами (1.5) – (1.7).

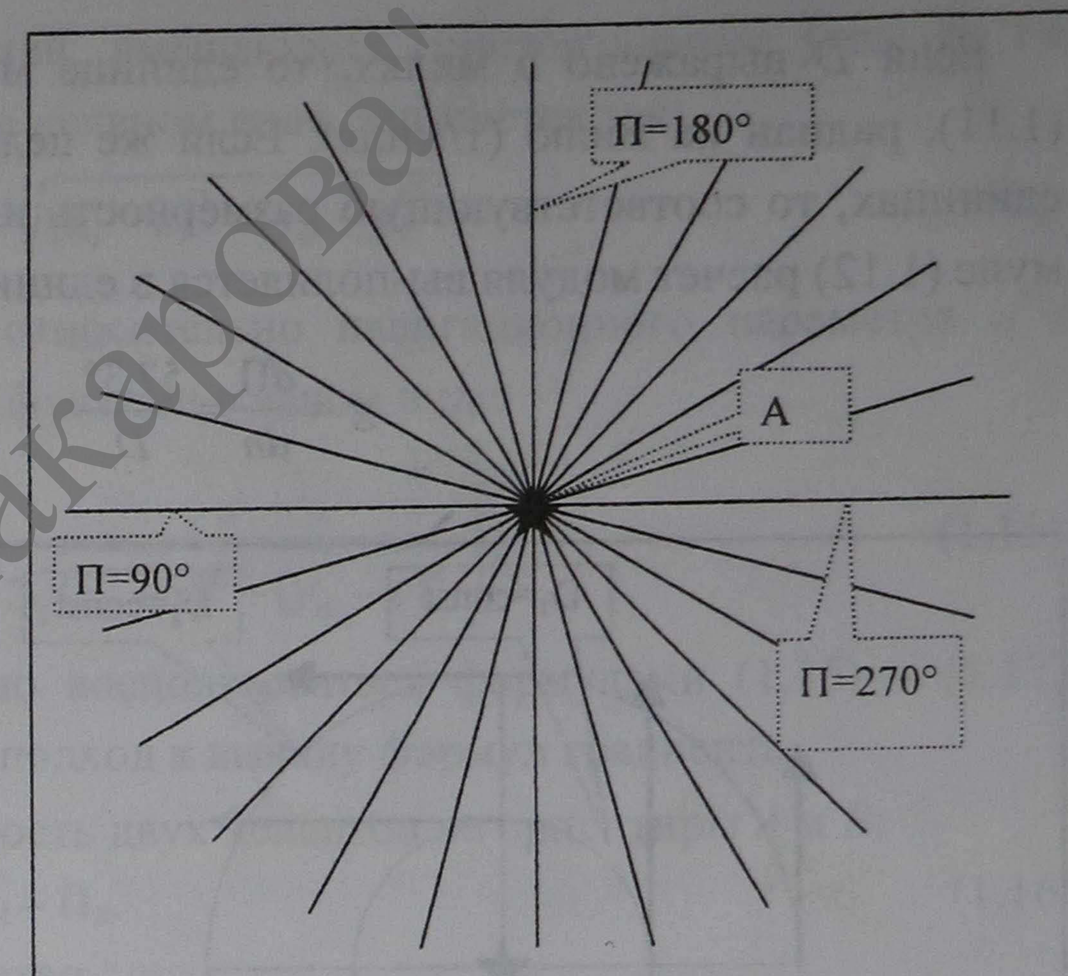


Рис. 1.5. Изолинии навигационной функции пеленга

$$\frac{\partial П}{\partial x} = \left[(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2\right]^{-1}(y_A - y) = \frac{\sin П}{D};$$

$$\frac{\partial П}{\partial y} = \left[(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2\right]^{-1}(x_A - x) = \frac{\cos П}{D}; \qquad (1.11)$$

$$g_П = \sqrt{\frac{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2}{\left[(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2\right]^2}} = \frac{1}{D};$$

$$tg\tau_П = \frac{-\dfrac{\cos П}{D}}{\dfrac{\sin П}{D}} = -\frac{\cos П}{\sin П} = \text{-ctgП} = \mathrm{ctg}(180° - П) = \mathrm{tg}(90° - (180° - П)) = \mathrm{tg}(П - 90°);$$

$$\tau_П = П - 90°.$$

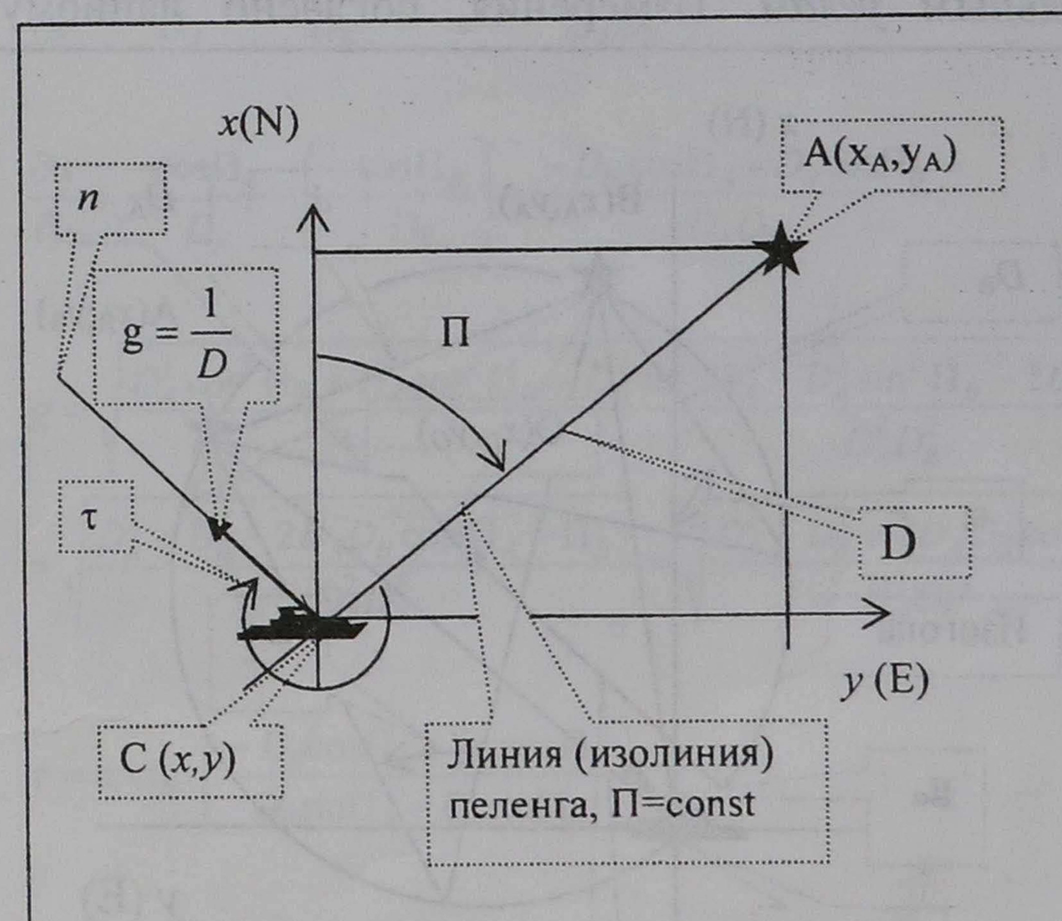


Рис. 1.6. Изолиния и градиент пеленга

После вычислений по формулам видим, что модуль градиента пеленга является величиной, обратной расстоянию до пеленгуемого ориентира, т.е. чем дальше находится ориентир, тем медленнее меняется пеленг на него. Это свойство является важным и влияет на точность определения места.

Направление градиента для прямого пеленга выбирается перпендикулярно линии пеленга, т.е. по нормали в сторону его увеличения. Нетрудно увидеть, что если судно будет перемещаться по направлению τ относительно меридиана, то пеленг на ориентир A будет увеличиваться.

Если D выражено в милях, то единица модуля градиента, согласно формуле (1.11), радиан на милю (1/миля). Если же пеленг выражен в градусах или других единицах, то соответствующую размерность имеет и градиент. Например, по формуле (1.12) расчет модуля вы-полняется в единицах град/миля:

$$g = \frac{d\Pi}{dn} = \frac{57{,}3°}{D}. \qquad (1.12)$$

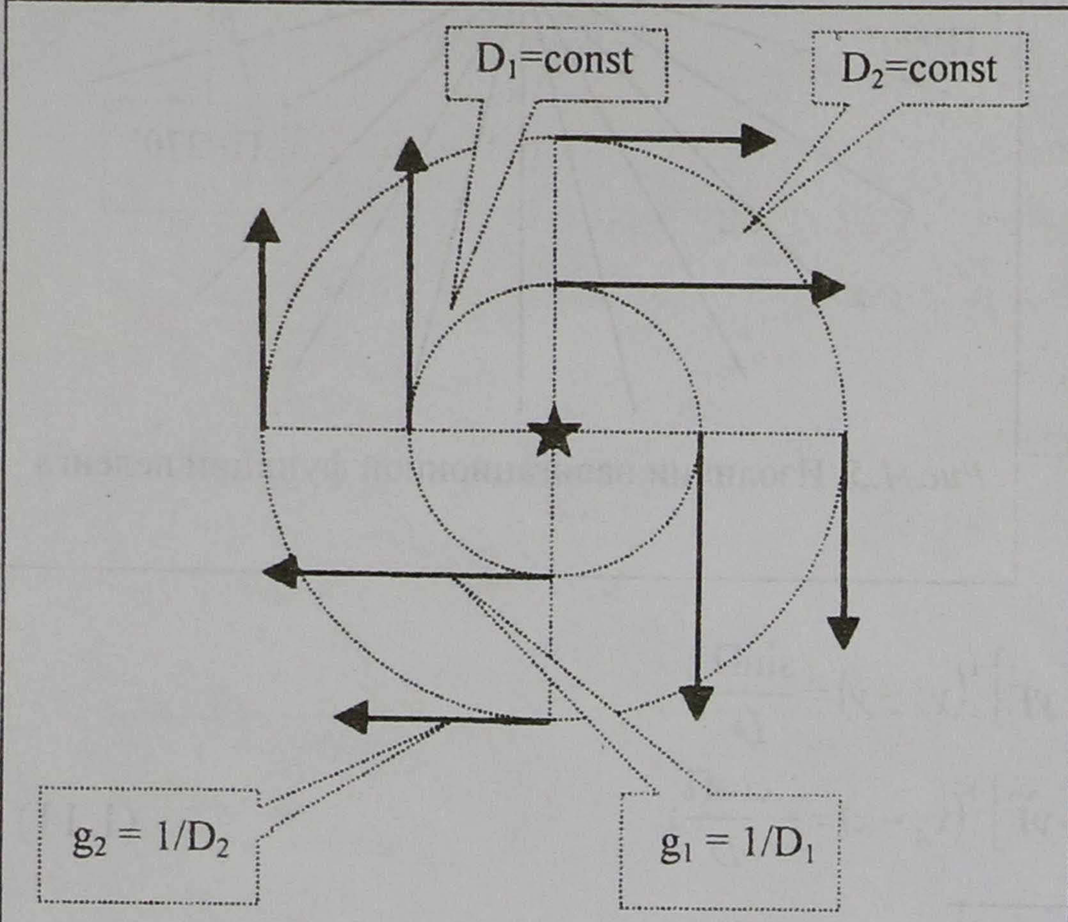


Рис. 1.7. Поле g_Π

Если для решения навигационной задачи используется обратный пеленг, т.е. с ориентира на судно, то естественно, что направление его изменится по сравнению с прямым пеленгом на 180°, т.е. для обратного пеленга имеем

$$\tau_\Pi = \Pi + 90°, \qquad (1.13)$$

а модуль вектора может быть рассчитан по приведенным ранее формулам.

Примерная иллюстрация поля градиентов пеленга представлена на рис. 1.7.

1.4. Навигационная функция горизонтального угла

Одним из самых точных методов классической навигации является *метод определения места по горизонтальным углам*. Измерения, согласно данному методу, проводятся с помощью секстана или пеленгатора компаса. Навигационная функция определяется навигационным параметром α – горизонтальным углом между двумя навигационными ориентирами A и B (рис. 1.8).

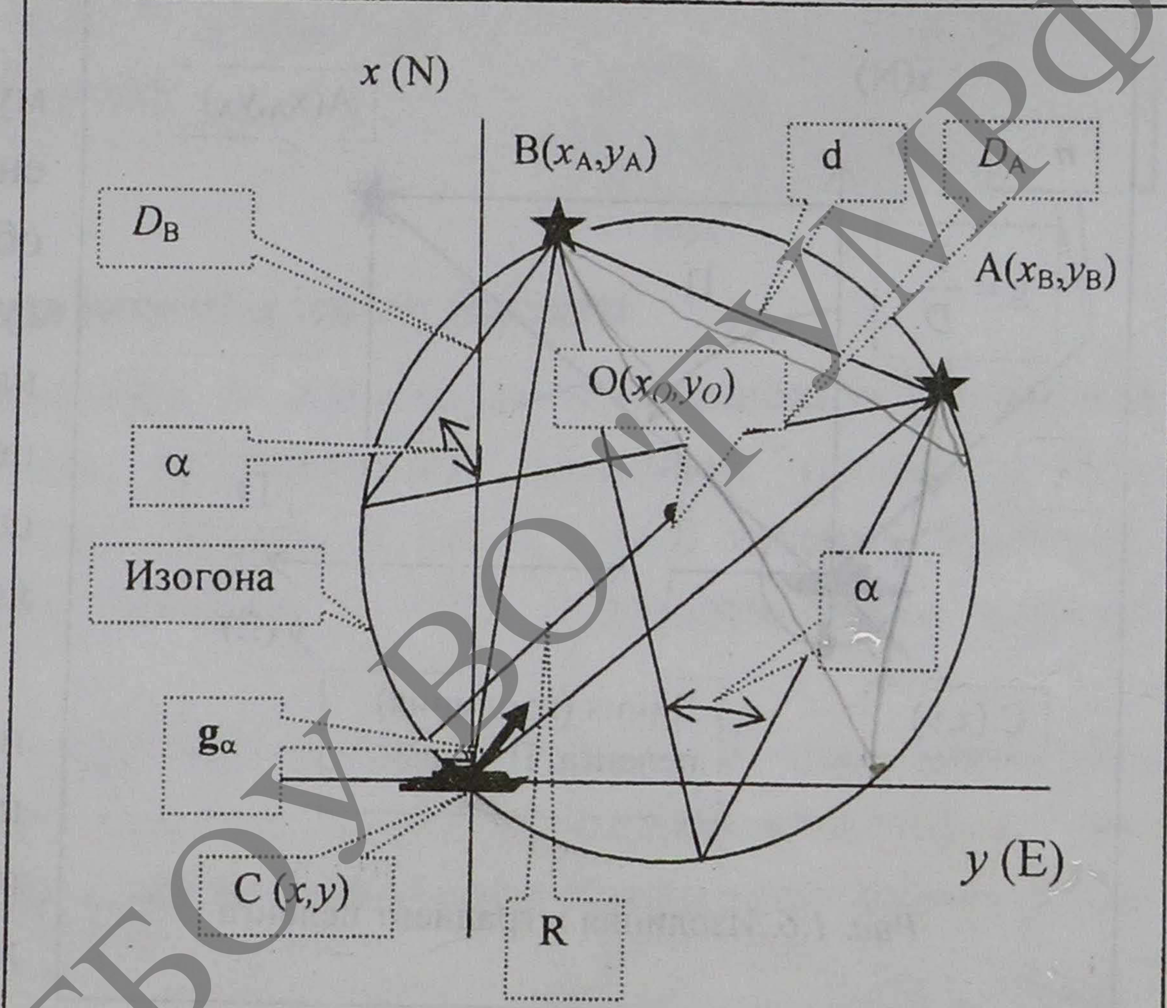


Рис. 1.8. Изолиния навигационной функции α

Расстояние между ориентирами d – называется *базой.*

Навигационной изолинией, вмещающей измеренный угол, является окружность с центром в точке O, которая в навигации называется *изогоной.* При решении задачи ОМС на плоскости – это плоская изогона.

Уравнение семейства окружностей, вмещающих горизонтальные углы α, т.е. уравнение навигационной функции в неявном виде, запишется так:

$$R = \frac{d}{2\sin\alpha} = \sqrt{(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2}. \qquad (1.14)$$

Преобразуем уравнение (1.14) относительно навигационного параметра α и получим выражение навигационной функции в явном виде:

$$\alpha = \arcsin\left[\frac{d}{2\sqrt{(x_o - x)^2 + (y_o - y)^2}}\right]. \qquad (1.15)$$

Для дальнейших выводов можно воспользоваться формулами (1.15) – (1.17), однако рассмотрим несколько иной подход к выводу формул градиента.

Угол α можно получить как разность двух пеленгов на ориентиры A и B:

$$\alpha = \Pi_A - \Pi_B. \qquad (1.16)$$

Тогда справедливо векторное равенство

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{g}_{\Pi_A} - \mathbf{g}_{\Pi_B}, \qquad (1.17)$$

или в векторно-матричных обозначениях

$$\mathbf{g}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial\alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Pi_A}{\partial x} \\ \frac{\partial\Pi_A}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial\Pi_B}{\partial x} \\ \frac{\partial\Pi_B}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Pi_A}{\partial x} - \frac{\partial\Pi_B}{\partial x} \\ \frac{\partial\Pi_A}{\partial y} - \frac{\partial\Pi_B}{\partial y} \end{pmatrix} \qquad (1.18)$$

Подставив в выражение (1.18) выражения из формул (1.11) для частных производных пеленга и применив к треугольнику ABC (см. рис.1.8) теорему косинусов для плоского треугольника, получим следующие выражения для горизонтального угла:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\sin\Pi_A}{D_A} - \frac{\sin\Pi_B}{D_B} = \frac{D_B\sin\Pi_A - D_A\sin\Pi_B}{D_A D_B};$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\frac{\cos\Pi_A}{D_A} - \left(-\frac{\cos\Pi_B}{D_B}\right) = \frac{-D_B\cos\Pi_A + D_A\cos\Pi_B}{D_A D_B};$$

$$g = \sqrt{\frac{D_A^2\cos^2\Pi_A + D_A^2\cos^2\Pi_B + D_B^2\sin^2\Pi_A + D_A^2\sin^2\Pi_B - 2D_A D_B(\cos\Pi_A\cos\Pi_B + \sin\Pi_A\sin\Pi_B)}{D_A^2 D_B^2}} = \qquad (1.19)$$

$$= \sqrt{\frac{D_A^2 + D_B^2 - 2D_A D_B\cos(\Pi_A - \Pi_B)}{D_A^2 D_B^2}} = \sqrt{\frac{D_A^2 + D_B^2 - 2D_A D_B\cos\alpha}{D_A^2 D_B^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{D_A^2 D_B^2}} = \frac{d}{D_A D_B}.$$

$$\tau = \mathrm{arctg}\left(\frac{-D_B\cos\Pi_A + D_A\cos\Pi_B}{D_B\sin\Pi_A - D_A\sin\Pi_B}\right).$$

Еще одна формула для модуля градиента g_α, применяемая в навигации для анализа геометрических и точностных характеристик, имеет следующий вид (рис. 1.9):

$$g_\alpha = \frac{\sin\alpha}{h}. \qquad (1.20)$$

Градиент направлен к центру изогоны по направлению τ.

Как видно из рис. 1.10, на котором представлены изолинии навигационной функции горизонтального угла, при приближении к ориентирам скорость изменения функции увеличивается (изолинии становятся гуще), т.е. модуль градиента растет.

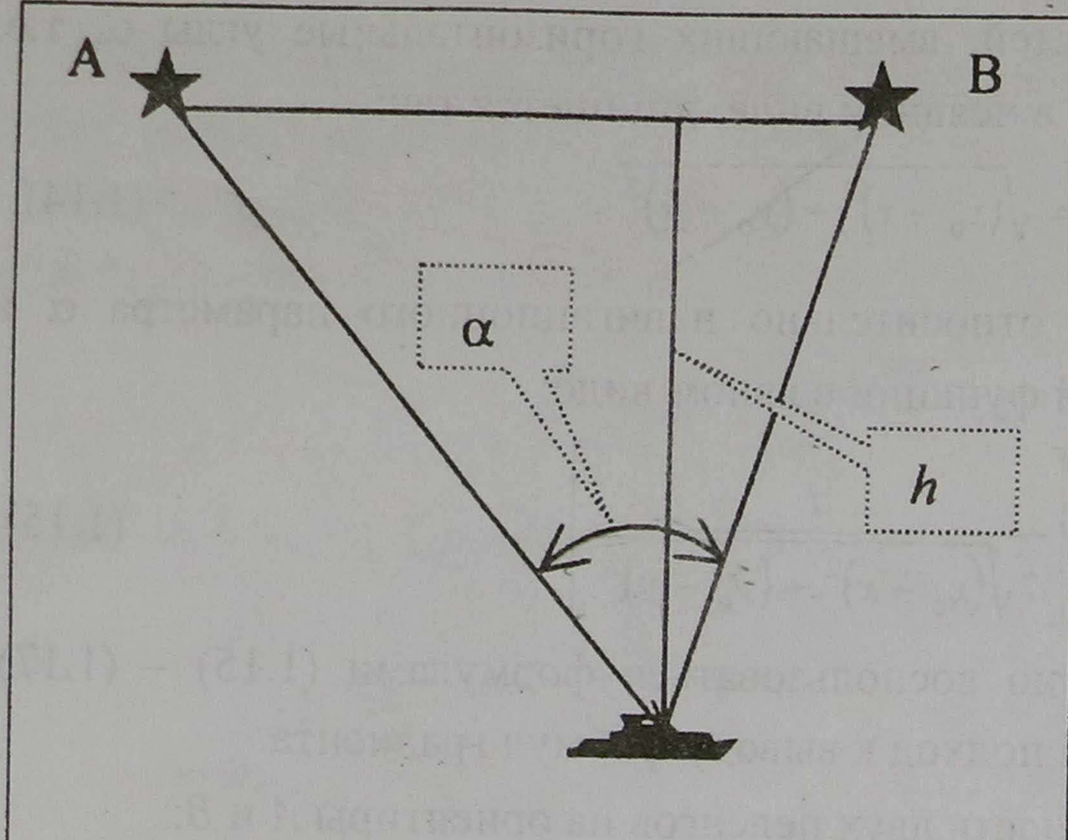
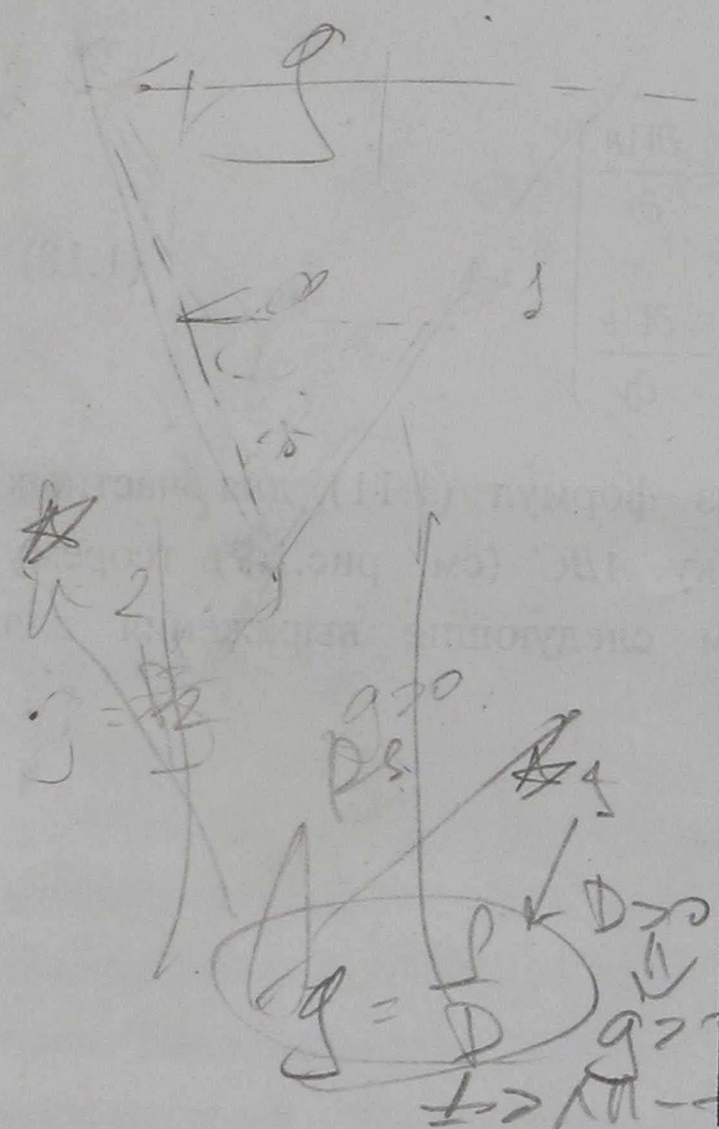


Рис. 1.9. горизонтальный угол



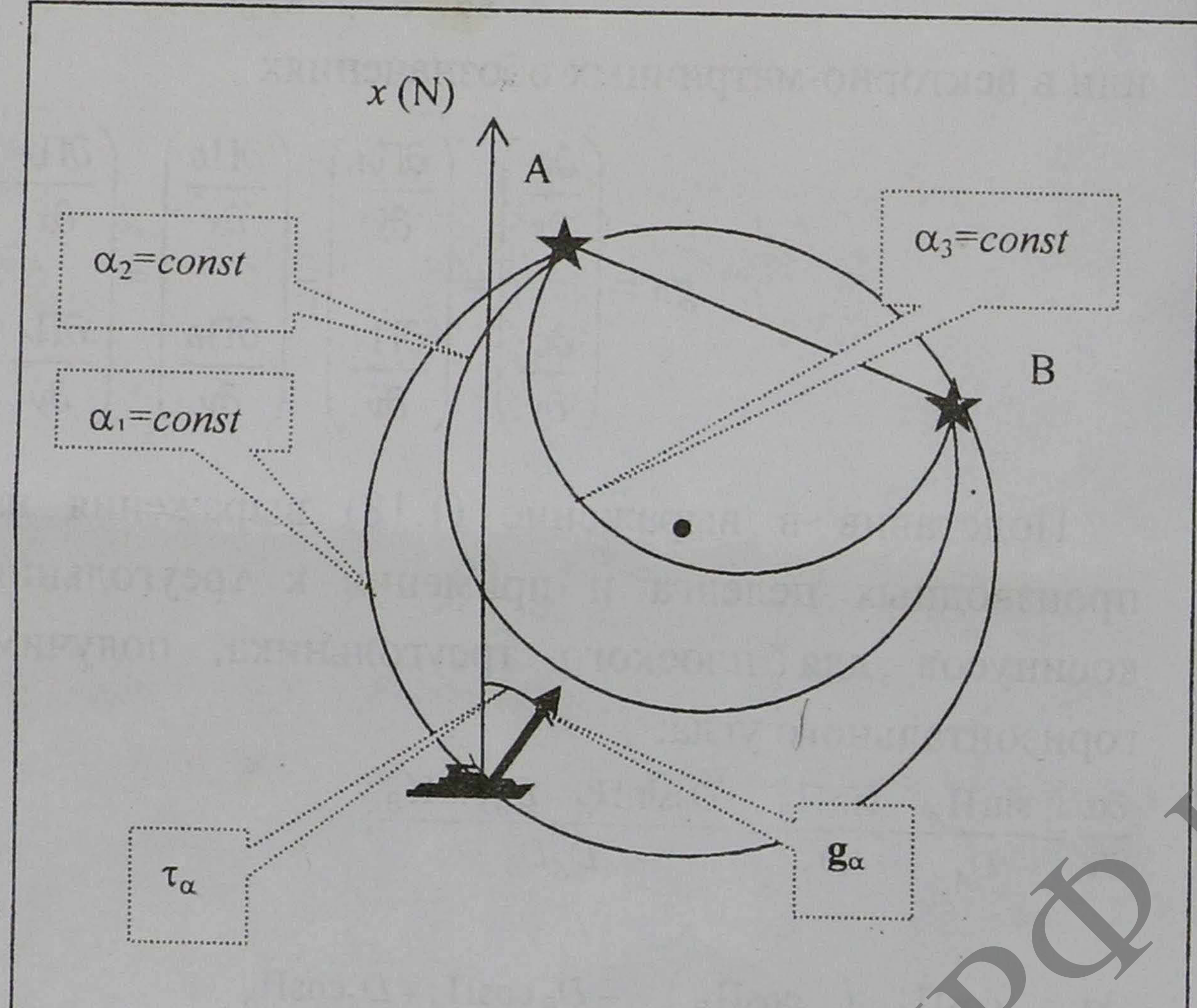


Рис. 1.10. Сетка изолиний навигационной функции α

1.5. Навигационная функция вертикального угла

Если высота навигационного ориентира известна, то измерив с помощью секстана его вертикальный угол β, можно рассчитать расстояние до ориентира. В данном случае навигационным параметром является угол β (рис. 1.11), навигационная изолиния которого – окружность, а навигационная функция может быть записана в виде:

$$\beta = \operatorname{arcctg}\left(\frac{D}{h}\right). \qquad (1.21)$$

Угол β пересчиты-вается в другой нави-гационный параметр – расстояние до ориентира D,

$$D = h\operatorname{ctg}\beta. \qquad (1.22)$$

Для получения формул градиента функции (1.21), воспользовавшись применявшимися ранее формулами (1.5) и (1.6), имеем:

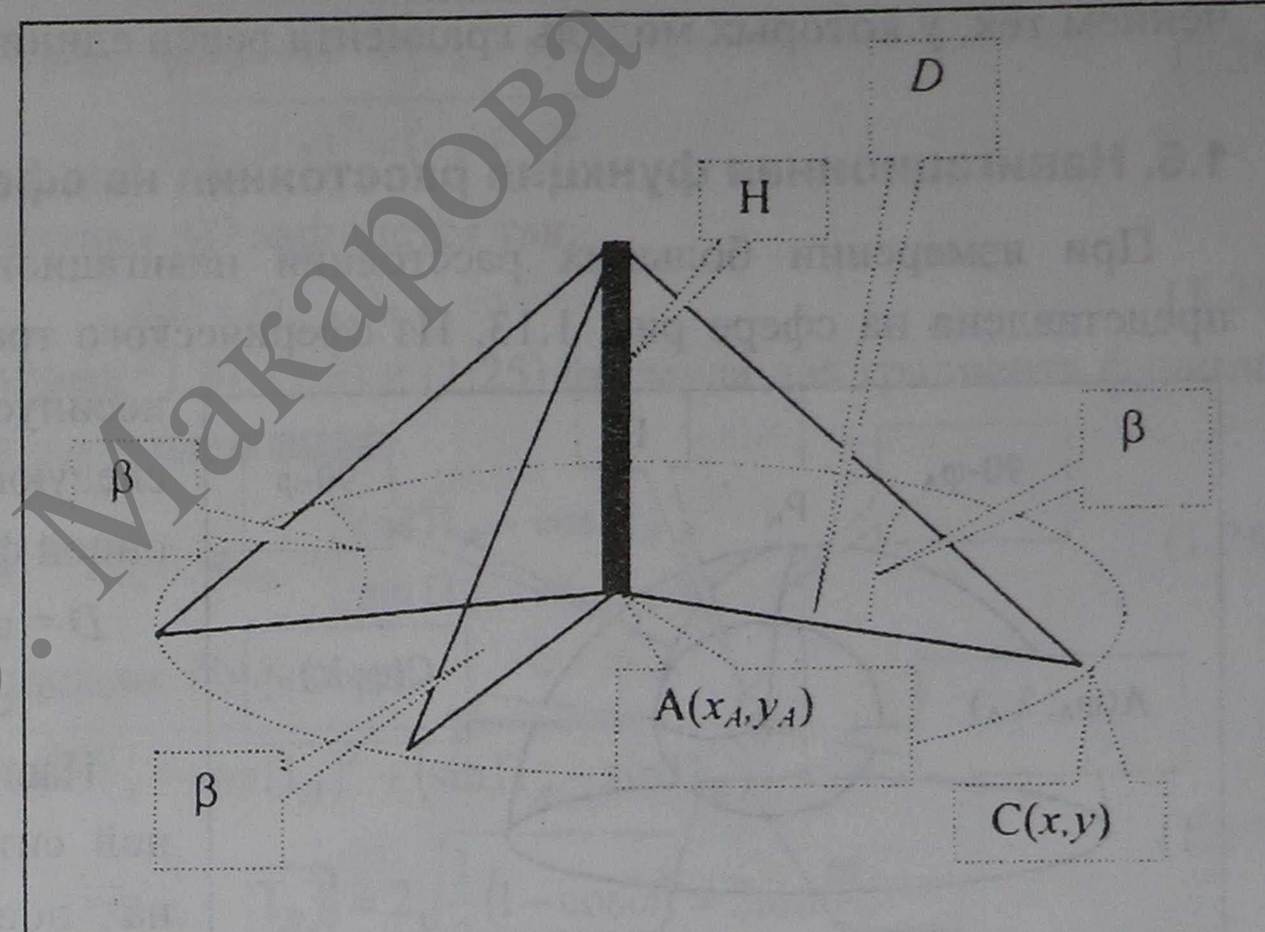


Рис. 1.11. Измерение вертикального угла β

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{D^2}{H^2}}\cdot\frac{x_A - x}{H\sqrt{(x_A-x)^2+(y_A-y)^2}} = \frac{H(x_A-x)}{(H^2+D^2)D};$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial y} = \frac{H(y_A-y)}{(H^2+D^2)D}; \qquad (1.23)$$

$$g = \sqrt{\frac{H^2[(x_A-x)^2+(y_A-y)^2]}{(H^2+D^2)^2D^2}} = \frac{H}{H^2+D^2};$$

$$\tau = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_A-y}{x_A-x}\right) = \Pi_A.$$

Анализ формул (1.23) позволяет сделать вывод, что модуль вектора градиента вертикального угла увеличивается при приближении к навигационному ориентиру, а его направление совпадает с пеленгом на ориентир. На рис. 1.12 представлена навигационная функция β в виде сетки изолиний, проведенных через равные промежутки $\Delta\beta$. Как видно, «густота» сетки увели-чивается с приближением к ориентиру, возрастает, соответственно, и скорость изменения навигационного параметра, т.е. модуль градиента функции. В районе A градиент больше, чем в районе B. Следует

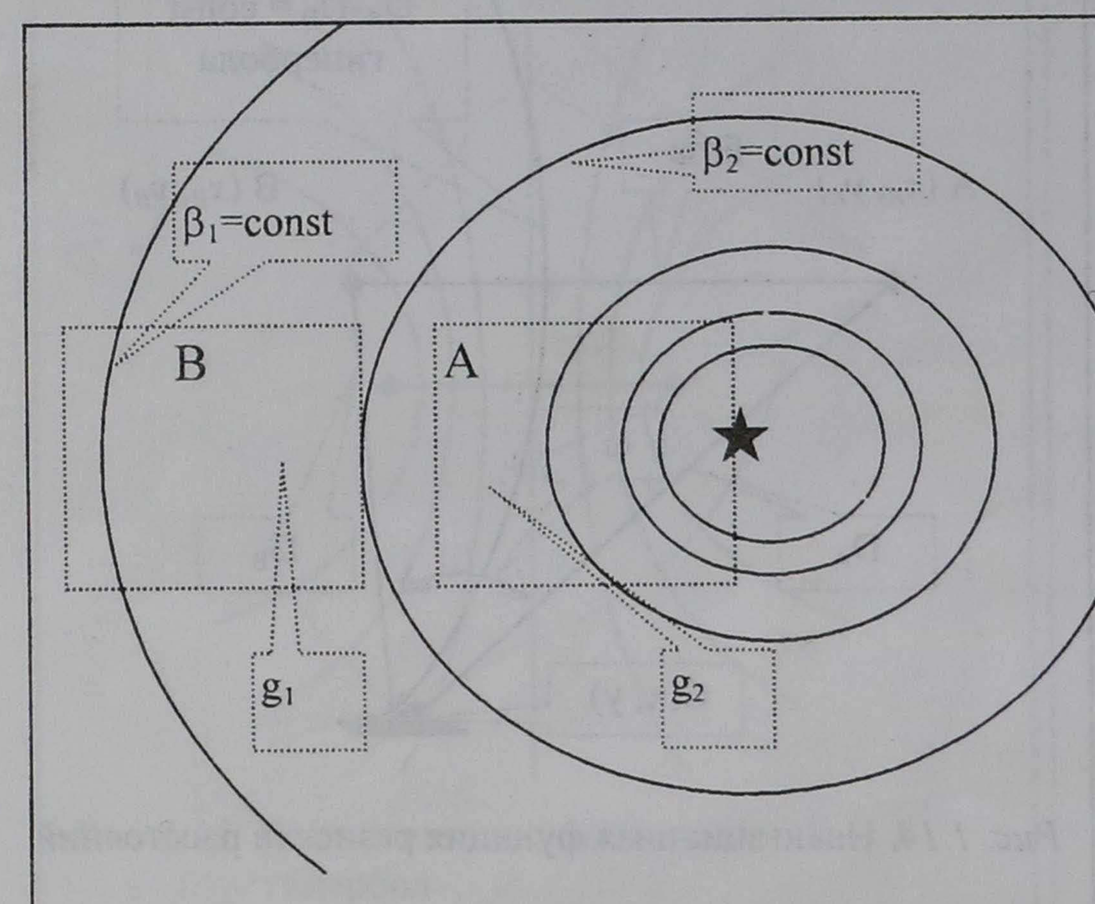


Рис. 1.12. Сетка изолиний навигационной функции β

отметить, что все навигационные функции обладают таким свойством, за исключением тех, у которых модуль градиента равен единице.

1.6. Навигационная функция расстояния на сфере

При измерении больших расстояний навигационная функция должна быть представлена на сфере рис. 1.13. Из сферического треугольника AP_NC по теореме косинуса стороны получим следующее уравнение навигационной функции:

Рис. 1.13. Изолиния расстояния на сфере

$$D = \arccos(\sin\varphi_A \sin\varphi + \cos\varphi_A \cos\varphi \cos\Delta\lambda). \qquad (1.24)$$

Навигационной изолинией в данной ситуации является малый круг на поверхности сферы, который имеет сферический радиус D и называется *сферической изостадией*.

Очевидно, что по аналогии с плоской изостадией $g = 1$, $\tau = \Pi \pm 180°$.

1.7. Навигационная функция разности расстояний на плоскости и сфере

Навигационный параметр и функция разности расстояний от судна до двух ориентиров описывают семейство изолиний, которые называются гиперболами. Функция используется в качестве геометрической основы разностно-дальномерных радионавигационных систем, таких как *«Лоран-С»* и *«Чайка»*.

С точки зрения математики гипербола – это геометрическое место точек постоянной разности расстояний ΔD до двух ее фокусов. В этих фокусах находятся навигационные ориентиры, до которых измеряется разность расстояний.

На рис. 1.14 показаны навигационные ориентиры $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$. Из текущей точки $C(x, y)$ до них получена разность расстояний $\Delta D = D_A - D_B$. Эта разность постоянна на изолинии, которая называется *гиперболой*. Линия, соединяющая навигационные ориентиры, называется *базой*. Из точки $C(x, y)$ база видна под углом ω, называемым *базовым углом*.

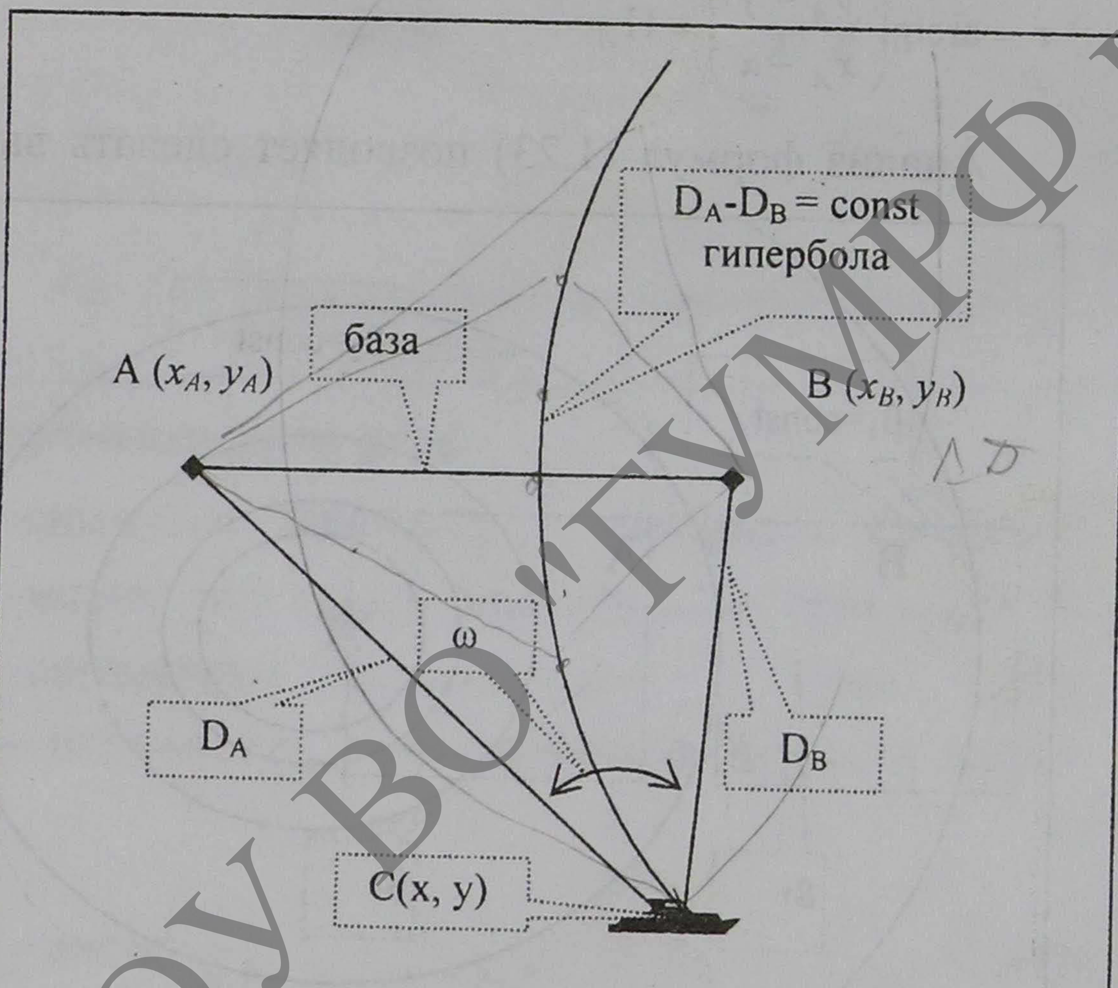


Рис. 1.14. Навигационная функция разности расстояний

Используя формулу (1.8), запишем функции расстояний:

$$D_A = \sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2} \qquad (1.24)$$
$$D_B = \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2}.$$

Тогда навигационная функция ΔD запишется так:

$$\Delta D = D_A - D_B. \qquad (1.25)$$

В соответствии с формулами (1.8), (1.9) и (1.25) формула для градиента функции может быть представлена в векторном виде:

$$\mathbf{g}_{\Delta D} = \mathbf{g}_{D_A} - \mathbf{g}_{D_B} = \begin{pmatrix} \cos\Pi_A - \cos\Pi_B \\ \sin\Pi_A - \sin\Pi_B \end{pmatrix}. \qquad (1.26)$$

Модуль рассчитаем по теореме Пифагора:

$$g = \sqrt{(\cos\Pi_A - \cos\Pi_B)^2 + (\sin\Pi_A - \sin\Pi_B)^2} =$$
$$= \sqrt{2[1 - \cos(\Pi_A - \Pi_B)]} = 2\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos\omega)} = 2\sin\frac{\omega}{2}. \qquad (1.27)$$

Направление градиента определится в соответствии с формулой (1.7) следующим образом:

$$\tau = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\Pi_A - \sin\Pi_B}{\cos\Pi_A - \cos\Pi_B}\right). \qquad (1.28)$$

Анализ выражения (1.27) позволяет сделать вывод о том, что при удалении от базы модуль градиента разности расстояний уменьшается. Поле гипербол показано на рис. 1.15.

Применив формулу косинуса стороны сферического треугольника, запишем навигационную функцию

$$\Delta D = \arccos D_A - \arccos D_B. \qquad (1.29)$$

На сфере гипербола представлена замкнутой кривой (рис. 1.16). Модуль градиента g и его направление τ определяется по формулам (1.27) и (1.28).

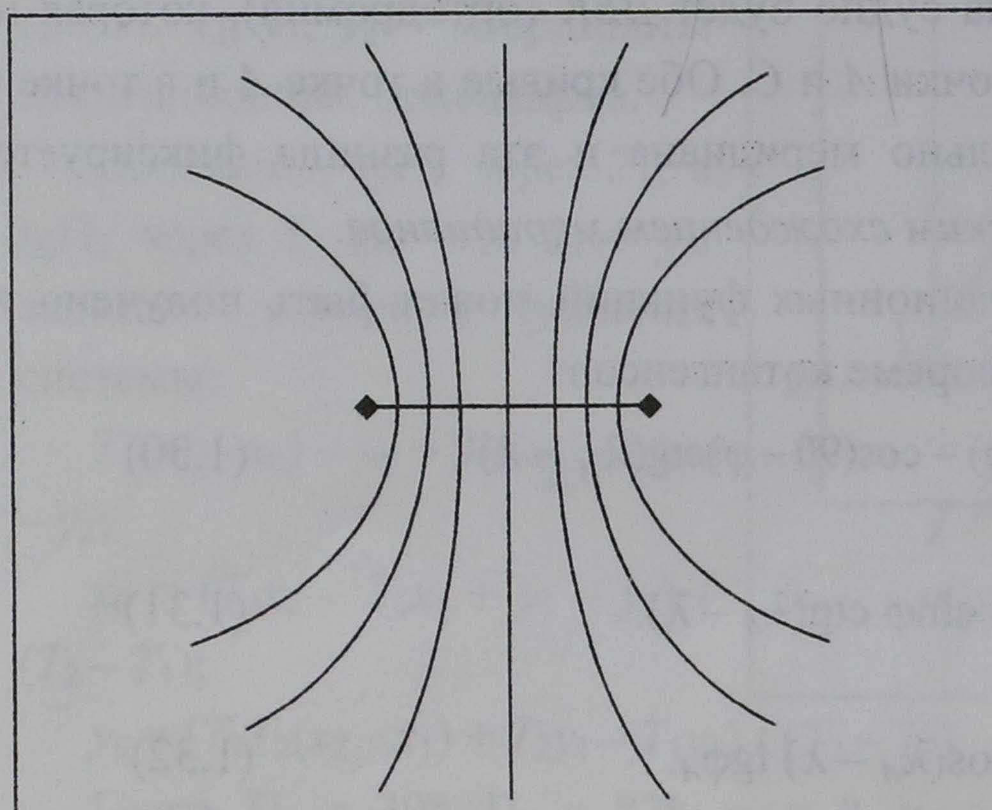


Рис. 1.15. Поле навигационных изолиний – гипербол

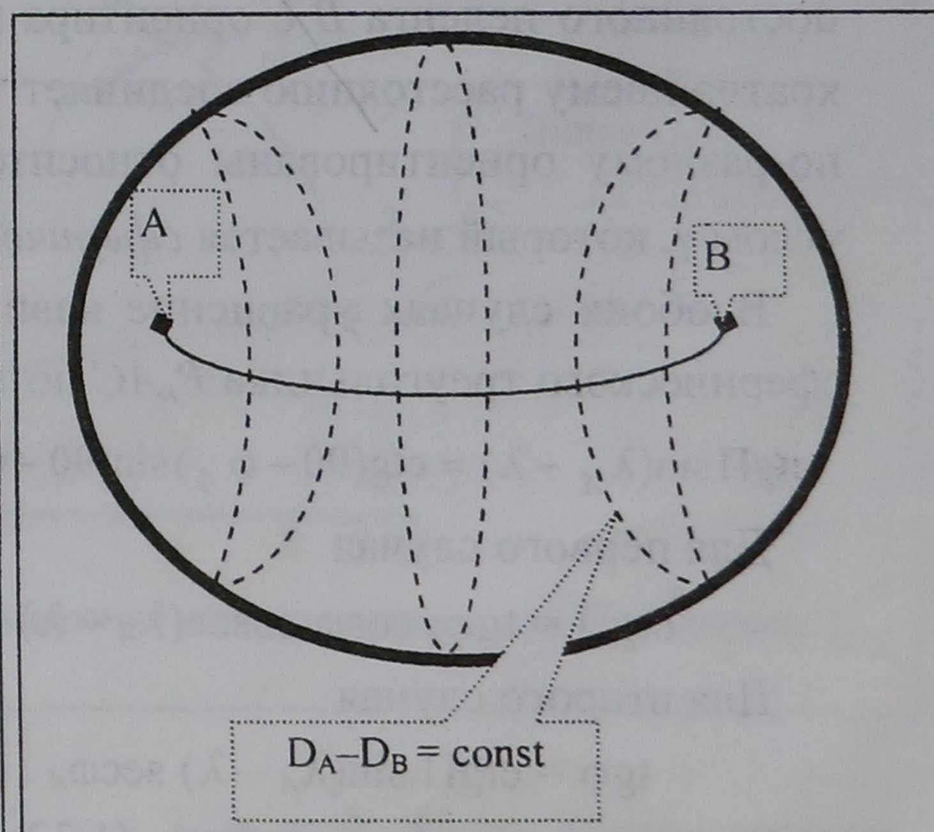


Рис. 1.16. Сферические гиперболы

1.8. Навигационная функция прямого и обратного пеленга на сфере

При пеленговании на сфере различают два случая:

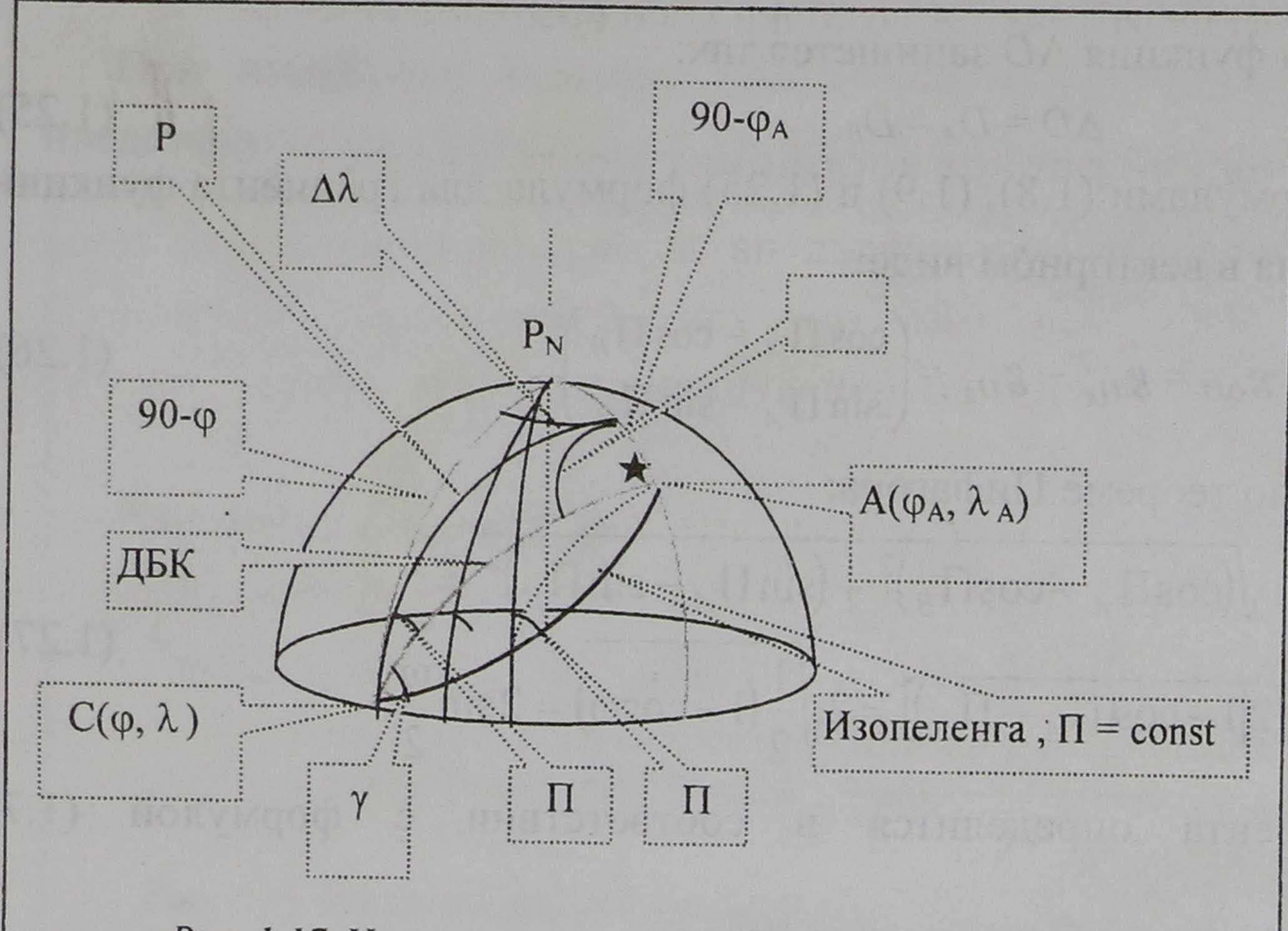


Рис. 1.17. Изолинии прямого и обратного пеленга на сфере

1) с судна пеленгуется навигационный ориентир A, т.е. измеряется прямой пеленг П (*обратная радиозасечка*);

2) с ориентира пеленгуется судно C, т.е. измеряется обратный пеленг B (*прямая радиозасечка*).

В случае прямого пеленгования навигационного ориентира с судна на больших расстояниях навигационная функция может быть получена средствами сферической тригонометрии. На рис. 1.17 навигационный ориентир A пеленгуется из точки C. Если необходимо двигаться так, чтобы навигационный параметр П на ориентир A всегда был постоянным, то нужно следовать по некоторой кривой, называемой *изопеленгой*, или *изоазимутой*. Эта кривая показана на рис. 1.17 яркой линией. В любой ее точке угол П между нордовой частью истинного меридиана и направлением на ориентир (дуга большого круга) будет постоянным.

Если судно запеленговано с помощью *пеленгаторной станции*, то изолинией постоянного пеленга B с ориентира на судно будет *ДБК* (ортодромия), которая по кратчайшему расстоянию соединяет точки A и C. Обе кривые в точке A и в точке C по-разному ориентированы относительно меридиана и эта разница фиксируется углом γ, который называется *сферическим схождением меридианов*.

В обоих случаях уравнение навигационных функций может быть получено из сферического треугольника P_nAC по теореме котангенсов:

$$\mathrm{ctg}\Pi \sin(\lambda_A - \lambda) = \mathrm{ctg}(90 - \varphi_A)\sin(90 - \varphi) - \cos(90 - \varphi)\mathrm{ctg}(\lambda_A - \lambda). \qquad (1.30)$$

Для первого случая

$$\mathrm{ctg}\Pi = \mathrm{tg}\varphi_A \cos\varphi \,\mathrm{cosec}(\lambda_A - \lambda) - \sin\varphi \,\mathrm{ctg}(\lambda_A - \lambda). \qquad (1.31)$$

Для второго случая

$$\mathrm{tg}\varphi = \mathrm{ctg}\Pi \sin(\lambda_A - \lambda) \sec\varphi_A + \cos(\lambda_A - \lambda)\,\mathrm{tg}\varphi_A. \qquad (1.32)$$

Задаваясь в выражении (1.32) координатами навигационного ориентира, величиной ортодромического пеленга B и долготой судна, имеем возможность вычислять широту точек ортодромии.

Параметры градиентов можно получить, используя традиционные приемы, показанные ранее. Приведем результаты, известные из литературы по навигации:

$$g_\Pi = \sin\Pi / \mathrm{tg}P, \quad \tau = \Pi - 90° + \gamma; \qquad (1.33)$$

$$g_B = 1 / \sin D, \quad \tau = B + 90° + \gamma. \qquad (1.34)$$

Здесь P – сферический перпендикуляр, опущенный из точки C на меридиан точки A; $D = AC$ – расстояние от точки A до точки C по ортодромии.

1.9. Прямой аналитический расчет координат места судна

Для определения координат места судна на двумерной поверхности земного эллипсоида или шара необходимо измерить, как минимум, два навигационных параметра, и зная выражение навигационной функции, записать систему уравнений навигационных изолиний.

В качестве примера на судне можем измерить два навигационных параметра (расстояния) D_A и D_B до ориентиров $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$. Используя систему уравнений навигационных функций (1.24), при условии, что $D_A = 5$, а $D_B = 10$, систему уравнений навигационных изолиний можно записать в виде:

$$\begin{aligned} &\sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2} = 5; \\ &\sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} = 10. \end{aligned} \qquad (1.35)$$

Теперь необходимо решить систему (1.37) относительно неизвестных координат (x, y), которые являются координатами места судна. Прямое аналитическое решение таких задач имеет достаточно сложный вид даже для простых навигационных функций. Рассмотрим задачу определения места по двум пеленгам на плоскости.

Система уравнений, записанная из выражения (1.10), в соответствии с рис. 1.18 будет иметь вид:

$$\mathrm{tg}\Pi_1 = \frac{y_1 - y}{x_1 - x}; \qquad \mathrm{tg}\Pi_2 = \frac{y_2 - y}{x_2 - x}. \qquad (1.36)$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – координаты навигационных ориентиров.

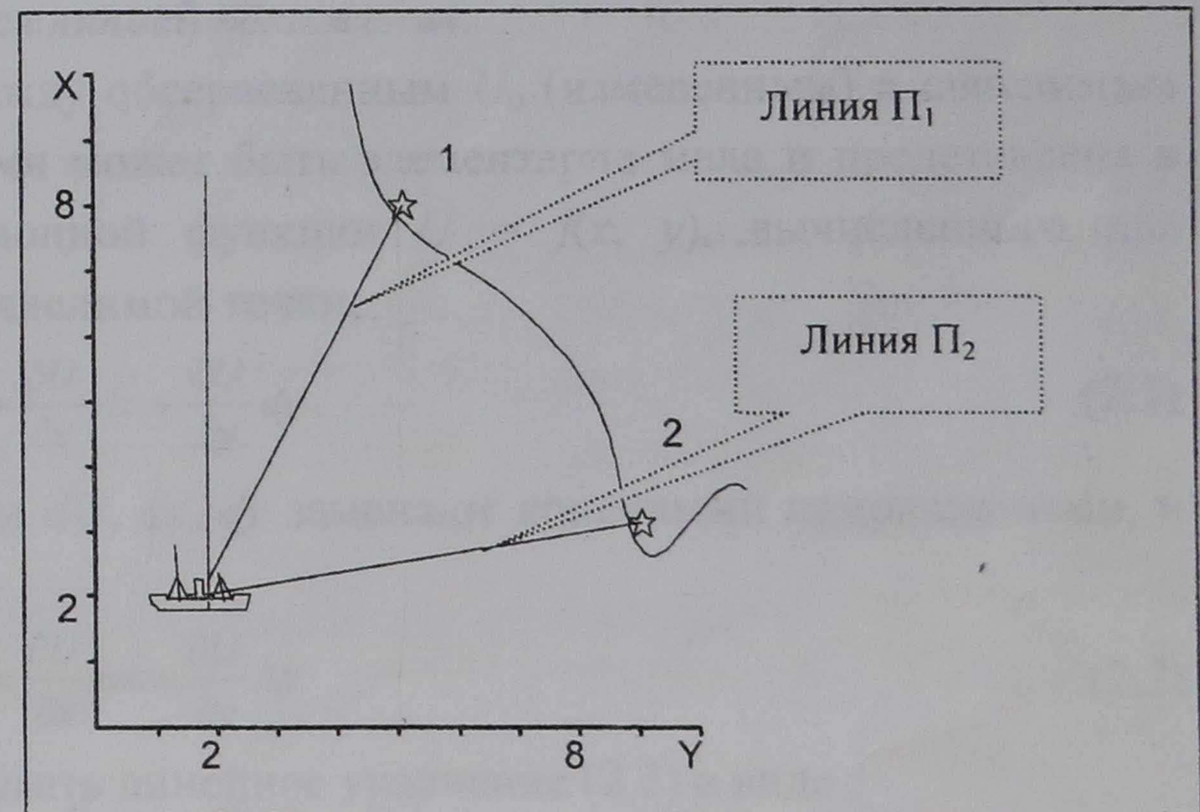


Рис. 1.18. Измерение двух навигационных параметров

Обозначив $\mathrm{tg}\Pi_1$ через T_1, а $\mathrm{tg}\Pi_2$ через T_2 ($x_0 = x$, $y_0 = y$), запишем алгоритм решения системы:

$T_1(x_1 - x_0) - y_1 = T_2(x_2 - x_0) - y_2$;

$x_0 = (T_2x_2 - T_1x_1 + y_1 - y_2) / (T_2 - T_1)$;

$y_0 = (T_1T_2(x_2 - x_1) + T_2y_1 - T_1y_1) / (T_2 - T_1)$.

Пусть $\Pi_1 = 30°$, $\Pi_2 = 82°$, $x_1 = 8$, $y_1 = 5$, $x_2 = 3$, $y_2 = 9$. Тогда обсервованные прямоугольные координаты рассчитаем следующим образом:

$x_0 = (\mathrm{tg}(82°)\cdot 3 - \mathrm{tg}(30°)\cdot 8 + 5 - 9) / (\mathrm{tg}(82°) - \mathrm{tg}(30°)) = 1{,}95$ мили;

$y_0 = (\mathrm{tg}(30°)\cdot\mathrm{tg}(82°)\cdot(3 - 8) + (\mathrm{tg}(82°)\cdot 5 - \mathrm{tg}(30°)\cdot 9)) / (\mathrm{tg}(82°) - \mathrm{tg}(30°)) = 1{,}50$ мили.

Подобные решения существуют и при определении места судна другими способами: по двум расстояниям, двум горизонтальным углам, двум высотам светил (задача Гаусса) и т.д.

Прямые аналитические методы расчета координат имеют ряд недостатков: практически все навигационные функции являются нелинейными, а поэтому решение таких систем уравнений неоднозначно, что может привести к возникновению опасной ситуации. Поскольку методы решения не универсальны, это не дает единого подхода к синтезированию алгоритмов и программному обеспечению.

На основании вышеизложенного видно, что все навигационные функции на сфере описываются с помощью тригонометрических функций, которые, в силу своей периодичности, вносят дополнительную многозначность в расчет координат.

На практике прямой аналитический метод заменяют графоаналитическим подходом, т.е. навигационные изолинии прокладывают или заранее наносят на навигационной карте.

2

Расчет координат места судна

Глава содержит описание методов обработки навигационной информации и оценки точности обсервации.

2.1. Линеаризация навигационных функций

Для устранения недостатков прямых аналитических методов расчета координат применяют процедуру линеаризации навигационных функций в окрестности некоторой точки, которая, как предполагают, должна быть близка к обсервованной. В морской навигации это счислимая точка $C(x_c, y_c)$. Линеаризацию производят с помощью разложения навигационной функции в ряд Тейлора с сохранением только первых членов разложения. Геометрически – это замена графического изображения функции в счислимой точке (*навигационной изолинии*), касательной к ней. Так как в измерениях всегда присутствуют погрешности, то измеренный навигационный параметр никогда не совпадет с навигационным параметром в счислимой точке (*счислимый навигационный параметр*), поэтому эта касательная из-за погрешности измерения смещается параллельно самой себе в сторону измеренного навигационного параметра и называется *линией положения*.

Таким образом, разность между обсервованным $U_о$ (измеренным) и счислимым $U_с$ навигационными параметрами может быть элементарно мала и представлена в виде дифференциала навигационной функции $U = f(x, y)$, вычисленного для некоторой малой окрестности счислимой точки,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy\,. \tag{2.1}$$

На практике дифференциалы dU, dx, dy заменяют конечными приращениями, и формула (2.1) принимает вид:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y\,. \tag{2.2}$$

В навигации принято записывать линейное уравнение (2.2) в виде

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y = a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y = \Delta U\,, \tag{2.3}$$

где $\Delta U = U_о - U_с$, $\Delta x = x_о - x_с$, $\Delta y = y_о - y_с$ – разности обсервованных и счислимых навигационных параметров и координат.

Для графического решения задач определения места судна уравнения типа (2.3) используются в навигации в нормированном виде, получаемом при делении уравнения (2.3) на модуль градиента навигационной функции:

$$\frac{\partial U}{\partial x(g)}\Delta x+\frac{\partial U}{\partial y(g)}\Delta y=\Delta U/g=\Delta n\,. \tag{2.4}$$

Здесь выражения (2.3) и (2.4) описывают линию положения, а Δn – перенос линии положения от счислимой точки по направлению вектора-градиента, т.е. по нормали к изолинии. Правая часть уравнения (2.4) полностью согласуется с выражением (1.4).

В соответствии с приведенными рассуждениями дадим определение линии положения.

Линия положения – это касательная к навигационной изолинии в окрестности счислимой точки, смещённая на величину переноса.

Уравнение (2.4), с учетом формул п.1.1, может быть переписано в виде:

$$\cos\tau\Delta x+\sin\tau\Delta y=\Delta n\,. \tag{2.5}$$

Для навигационной функции расстояния линия положения представлена на рис. 2.1.

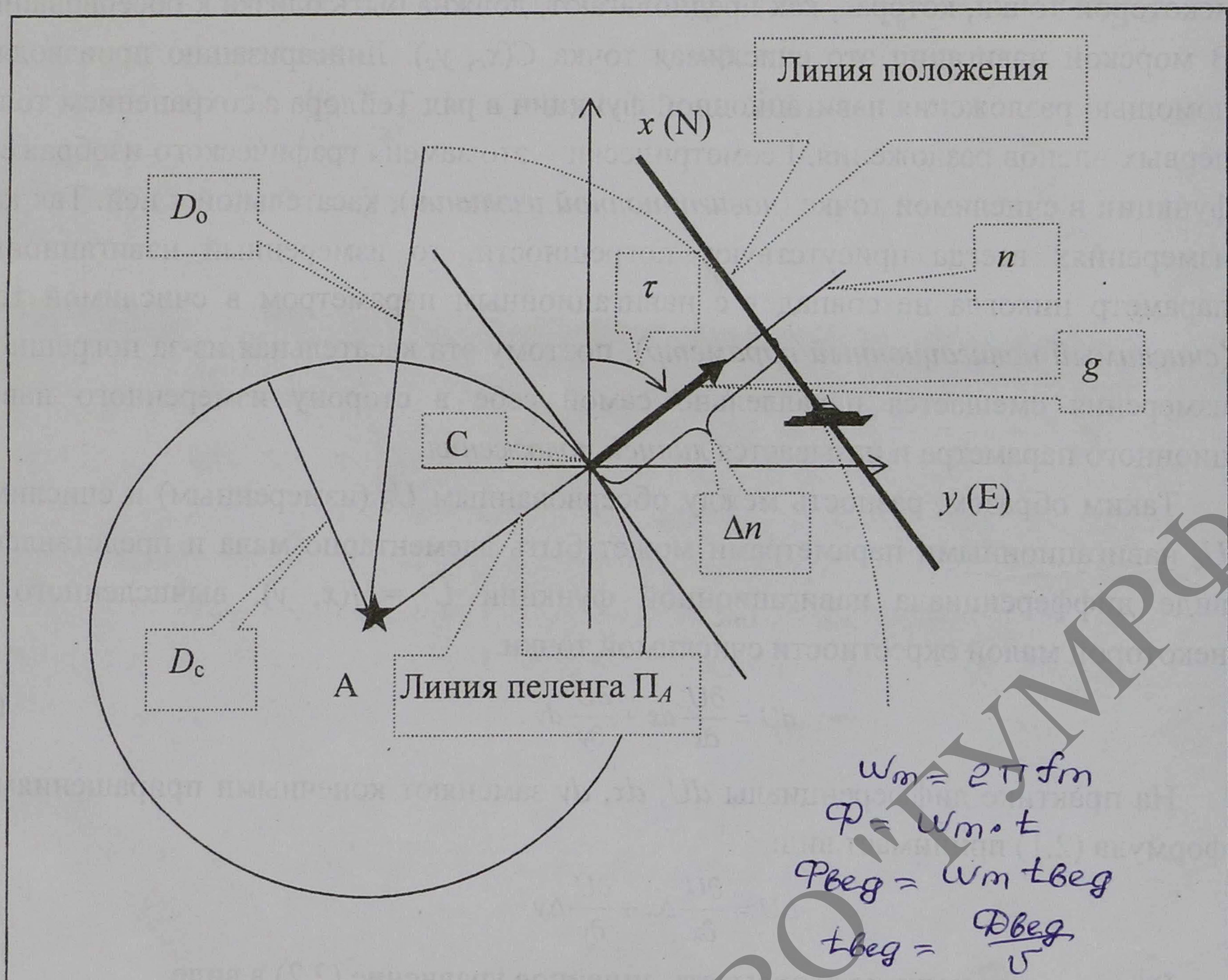


Рис. 2.1. Линия положения

$w_m = 2\pi f_m$
$\varphi = w_m \cdot t$
$\varphi_{вед} = w_m t_{вед}$
$t_{вед} = \frac{D_{вед}}{v}$
$v = \lambda f$
$\varphi_{вед} = w_m \frac{D_{вед}}{v}$

2.2. Аналитический вариант расчета координат места судна по двум линиям положения

Для определения места судна достаточно измерить два навигационных параметра, т.к. поверхность, на которой ищутся обсервованные координаты, – двумерная (положение точки определяется двумя координатами).

Алгоритм расчета:

а) в момент времени t измеряются два навигационных параметра U_{o1} и U_{o2};

б) на этот же момент времени снимаются счислимые координаты x_c, y_c и на них рассчитываются счислимые навигационные параметры U_{c1} и U_{c2};

в) для счислимых координат рассчитываются коэффициенты линий положения a_{ij}, т.е. частные производные по навигационным параметрам от навигационных функций;

г) правые части уравнений линий положения рассчитываются по формулам: $\Delta U_1 = U_{o1} - U_{c1}$, $\Delta U_2 = U_{o2} - U_{c2}$;

д) составляется система двух уравнений линий положения, которая может быть переписана в матричном виде:

$$\begin{aligned}&a_{11}\Delta x+a_{12}\Delta y=\Delta U_1;\\&a_{12}\Delta x+a_{22}\Delta y=\Delta U_2;\\&A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix},\Delta X=\begin{pmatrix}\Delta x\\\Delta y\end{pmatrix},\Delta U=\begin{pmatrix}\Delta U_1\\\Delta U_2\end{pmatrix},\Rightarrow A\Delta X=\Delta U,\end{aligned} \tag{2.6}$$

где A – матрица коэффициентов линий положения, ΔX – вектор неизвестных, ΔU – вектор измерений (вектор свободных членов);

е) решение системы уравнений линий положения (2.6) запишется в виде

$$\Delta X = A^{-1}\Delta U\,; \tag{2.7}$$

ж) если обозначить вектор счислимых координат как X_c, а вектор обсервованных координат как X_o, то можно записать:

$\varphi_{вед} = 2\pi f_m \frac{D_{вед}}{\lambda m \cdot f_m} = 2\pi \frac{D_{вед}}{\lambda m}$

$$X_o = X_c + \Delta X, \tag{2.8}$$

где $X_o=\begin{pmatrix}x_o\\y_o\end{pmatrix}$, $X_c=\begin{pmatrix}x_c\\y_c\end{pmatrix}$.

Так как вследствие линеаризации навигационных функций появляются методические погрешности, для их компенсации используется итерационная процедура (метод последовательных приближений), т.е. обсервованные координаты принимаются за новые счислимые ($X_o = X_c$), и вычисления продолжаются согласно указаниям пп. *б*), а заканчиваются тогда, когда длина вектора ΔX не будет меньше наперед заданной величины ε. Для навигационных задач это составляет обычно 2 – 3 итерации.

2.3. Расчет координат при избыточном числе измерений навигационных параметров

2.3.1. Равноточные измерения

Число навигационных измерений при определении места судна очень существенно. Если измеряются два навигационных параметра и определяются две координаты, то говорят, что в задаче отсутствует избыточность, т.е. система уравнений (2.6), как правило, совместна.

Отсутствие избыточности измерений приводит к неконтролируемому влиянию различных видов погрешностей на результат. Особенно опасны грубые промахи и систематические погрешности.

Для получения более надежной обсервации применяют избыточные навигационные измерения. Пусть для определения координат измерены три навигационных параметра ($n = 3$), а определить нужно две координаты ($k = 2$). В этой ситуации избыточность $r = n - k = 1$.

Первоначально систему уравнений линий положения в матричном виде запишем так же, как систему уравнений (2.6):

$$A\Delta X = \Delta U \,, \tag{2.9}$$

однако матрицы будут иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \Delta X = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \Delta U = \begin{pmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{pmatrix}.$$

В данной системе количество неизвестных k меньше, чем количество уравнений n. Решение любых двух уравнений дает положение одной из вершин треугольника. Это означает, что подстановка данного решения в третье уравнение, не обратит его в тождество. Такая система называется *несовместной*, т.е. решение пары уравнений не совместно с третьим. Для получения согласованного решения системы необходимо ввести дополнительные условия. Если предположить, что систематические погрешности в измерениях отсутствуют, т.е. они определены и исключены специальными приемами измерений, то все остальные погрешности измерений можно считать случайными. Известно, что центром группирования случайных величин является их математическое ожидание или его оценка – среднее значение, которое наиболее близко к истинному значению и имеет минимальную дисперсию. Очевидно, что и в данном случае необходимо найти среднее из трех точек, которое будет иметь статус оценки математического ожидания множества, состоящего из трех измерений. Ясно, что эта точка должна быть в фигуре погрешностей, а не вне ее. Несогласованность измерений возникает из-за погрешностей, которые называют *невязками* системы уравнений.

Теперь вместо системы (2.9), с учетом невязок, более корректно будет записать следующее матричное уравнение (система уравнений поправок):

$$A\Delta X = \Delta U + V \,, \tag{2.10}$$

где V – вектор невязок (погрешностей), который имеет вид:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Если принять, что для получения согласованного решения линии положения необходимо сдвинуть внутрь фигуры погрешностей на некоторые величины v_1, v_2 и v_3 соответственно (рис. 2.2), то математическое условие поиска оптимального согласованного решения относительно этого среднего значения (точка O) определится в соответствии с формулой (2.11), т.е. минимальной длиной вектора V:

$$Q = |V|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \min \,. \tag{2.11}$$

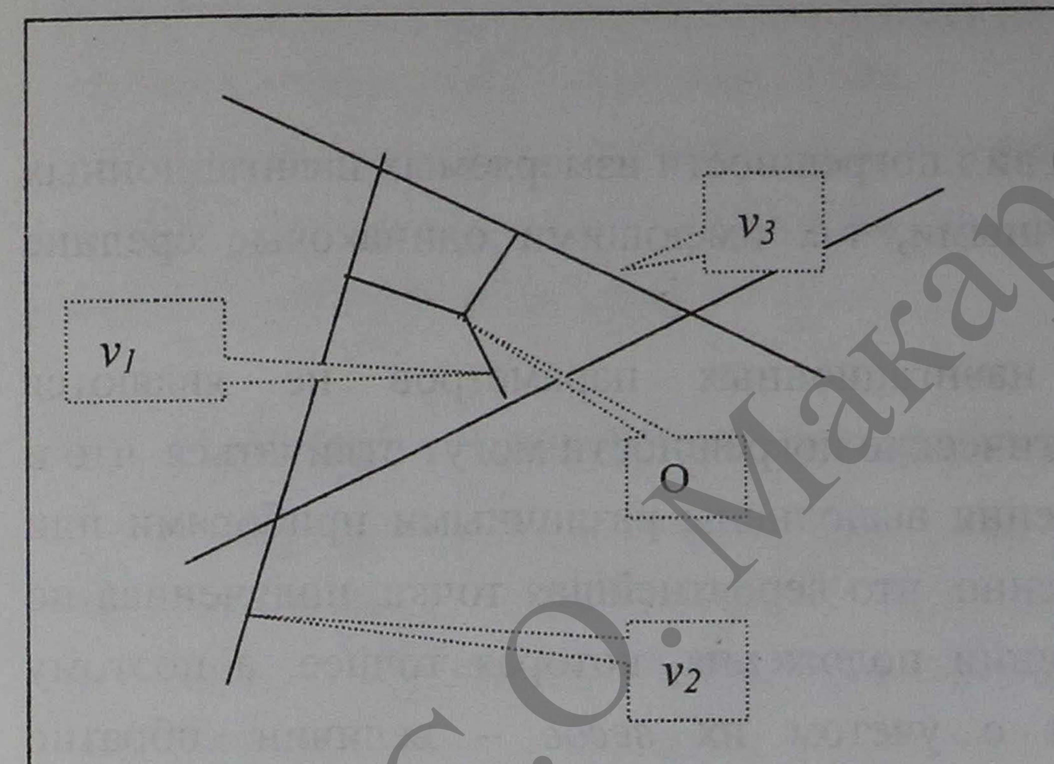


Рис. 2.2. К выводу формулы решения системы уравнений (2.7)

Здесь величины v_1, v_2 и v_3, выраженные в единицах измерений, называются невязками, поправками или погрешностями измерений в зависимости от придаваемого им знака.

Выражение (2.11) определяет условие решения системы (2.10), а отсюда и название рассматриваемого метода – *метод наименьших квадратов*.

Из формулы (2.10) запишем выражение относительно вектора невязок:

$$V = A\Delta X - \Delta U \,,$$

а значение функционала – в соответствии с формулой (2.11):

$$Q = V^T V = (A\Delta X - \Delta U)^T (A\Delta X - \Delta U). \tag{2.12}$$

Взяв производную от выражения (2.12) по вектору неизвестных и приравняв ее к нулю, находим формулу для решения системы (2.10):

$$\begin{aligned} &Q = \Delta X^T A^T \Delta X - \Delta U^T A\Delta X - \Delta X^T A^T \Delta U + \Delta U^T \Delta U; \\ &\frac{\partial Q}{\partial(\Delta X)} = 2A^T A\Delta X - \Delta U^T A - A^T \Delta U = 2A^T A\Delta X - 2A^T \Delta U = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Система (2.13) называется системой нормальных уравнений.

Теперь можно записать решение:

$$\Delta\hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T \Delta U \,. \tag{2.14}$$

Знак «^» над вектором искомых величин свидетельствует о том, что решение получено с применением критерия оптимальности Q. Рис. 2.3 поясняет решение по МНК.

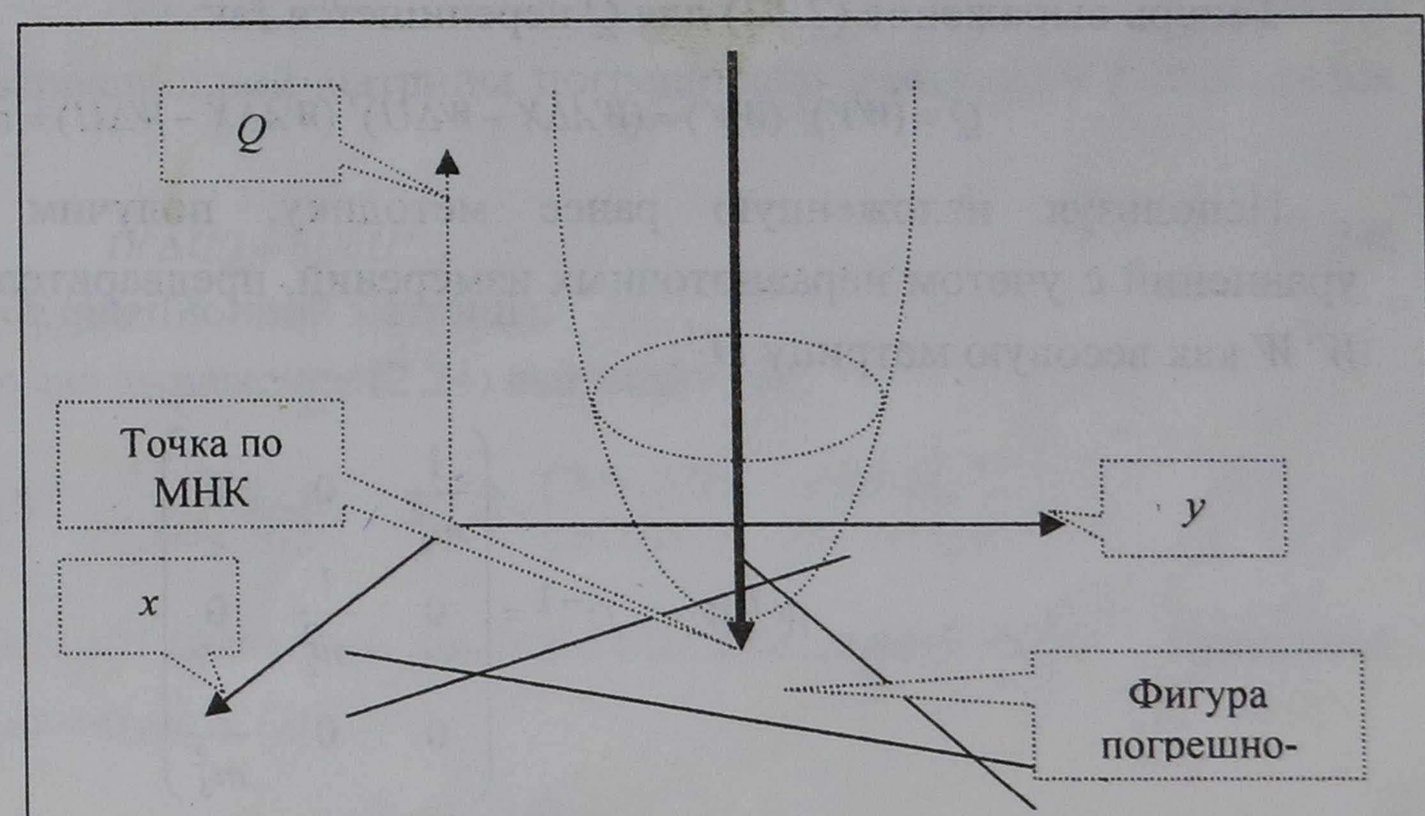


Рис.2.3. Геометрическая интерпретация МНК

После получения решения, согласно выражению (2.14) относительно счислимой точки в локальной системе координат, используется формула (2.8), а затем выполняется итерационная процедура. Точка, положение которой определяется вектором X_o, называется *вероятнейшей точкой*.

2.3.2. Неравноточные измерения

В п. 2.3.1 никак не рассматривался вид погрешности измеряемых навигационных параметров, они считались равноточными, т.е. имеющими одинаковые средние квадратические погрешности m.

В общем случае измерения навигационных параметров не являются равноточными, т.е. их средние квадратические погрешности могут отличаться, что и происходит на практике, если измерения выполнены различными приборами или различными наблюдателями. Естественно, что вероятнейшая точка, полученная по МНК, должна быть ближе к той линии положения, которая точнее, а поэтому уравнивание измерений происходит с учетом их *весов* – величин, обратно пропорциональных квадратам среднеквадратических погрешностей измерений, которые формируют так называемую весовую матрицу. Методика вывода ничем не отличается от предложенной в п. 2.3.1.

Умножим слева правую и левую части уравнения (2.10) на матрицу W, которая имеет следующий вид:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.15)$$

здесь m – средняя квадратическая погрешность измерения соответствующего навигационного параметра. Получим следующее уравнение:

$$WA\Delta X = W\Delta U + WV. \qquad (2.16)$$

Теперь выражение (2.12) для Q перепишется так:

$$Q = (WV)^T (WV) = (WA\Delta X - W\Delta U)^T (WA\Delta X - W\Delta U) = \min. \qquad (2.17)$$

Используя изложенную ранее методику, получим систему нормальных уравнений с учетом неравноточных измерений, предварительно обозначив матрицу $W^T W$ как весовую матрицу D^{-1}:

$$W^T W = D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3^2} \end{pmatrix} \qquad (2.18)$$

Система нормальных уравнений запишется

$$A^T D^{-1} A\Delta X = A^T D^{-1} \Delta U, \qquad (2.19)$$

а решение будет иметь вид:

$$\Delta\hat{X} = (A^T D^{-1} A)^{-1} A^T D^{-1} \Delta U. \qquad (2.20)$$

Если элементы матрицы (2.18) равны, это означает, что измерения равноточные и выражение (2.20) превращается в выражение (2.14). Формула (2.20) имеет более общий характер, чем уравнение (2.14).

Для определения координат опять воспользуемся формулой (2.8).

Вероятнейшая точка, полученная по формуле (2.20), определяет средневзвешенные значения координат.

2.4. Априорная оценка точности рассчитанных координат

Априорная оценка точности измеряемых навигационных параметров основана на многочисленных статистических исследованиях, которые происходили до конкретной обсервации. В качестве основного параметра для априорной оценки точности измеряемых величин применяется средняя квадратическая погрешность измеряемого навигационного параметра m.

Особенностью определения координат является тот факт, что измерения – косвенные, т.е. измеряются навигационные параметры и допущенные погрешности затем переносятся в погрешности координат. Рассмотрим процедуру переноса погрешностей измерений в погрешности координат на примере ОМС по двум измерениям.

В этом случае линеаризованная система принимает вид:

$$A\Delta X = \Delta U. \qquad (2.21)$$

Так как измерения имеют погрешности, перепишем систему в виде

$$A(\Delta X + \delta X) = \Delta U + \delta U. \qquad (2.22)$$

Тогда

$$A\delta X = \delta U,$$

откуда

$$\delta X = A^{-1}\delta U. \qquad (2.23)$$

Формирование ковариационной матрицы погрешности измерений выполняется по формуле

$$D(\Delta U) = \delta U \delta U^T, \qquad (2.24)$$

где D – обозначение ковариационной матрицы.

Для двумерного случая выражение (2.24) выглядит так:

$$\Delta U\, \Delta U^T = \begin{pmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_1 & \Delta U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta U_1 \Delta U_1 & \Delta U_1 \Delta U_2 \\ \Delta U_2 \Delta U_1 & \Delta U_2 \Delta U_2 \end{pmatrix},$$

а операция математического ожидания, выполненная с матрицей $\delta U \delta U^T$, превращает ее в ковариационную матрицу D,

$$D = \begin{pmatrix} m_1^2 & m_1 m_2 \\ m_2 m_1 & m_2^2 \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали D находятся дисперсии измеряемых навигационных параметров, а вне диагонали – ковариационные моменты, которые характеризуют статистическую связь между измерениями.

Аналогично определим ковариационную матрицу погрешностей искомых параметров, используя правила матричного исчисления $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ и $(B^{-1})^{-T} = (B^{-T})^{-1}$.

Получим

$$N = D(\Delta X) = D(\delta X \delta X^T) = D[(A^{-1}\delta U)(A^{-1}\delta U)^T] = (A^T D^{-1} A)^{-1}. \qquad (2.25)$$

В дальнейшем при написании ковариационных матриц, где это не вносит двузначности, будем опускать аргумент при D.

Для двумерного случая ковариационная матрица N имеет вид:

$$N = \begin{bmatrix} n_{12} & n_{21} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix},$$

где n_{11} – дисперсия погрешностей широты, n_{22} – дисперсия погрешностей отшествия, $n_{12} = n_{21}$ – ковариационные моменты.

Вся информация о погрешностях содержится в матрице N. В судовождении часто используется ее геометрическая интерпретация в виде эллипса погрешностей. Установим связь между элементами матрицы N и параметрами эллипса: полуосями и углом ориентации.

В общем случае такая задача рассматривалась Г. Хоттелингом в 1933 г. Ученым было доказано, что для ковариационной матрицы существуют векторы, направлениям которых соответствуют максимальные и минимальные значения рассеивания (погрешностей). Эти значения соответствуют собственным числам матрицы. Направления собственных векторов, указывающие на направление максимального и минимального рассеивания (дисперсии), соответствуют направлениям полуосей эллипса. Собственные числа – это экстремальные значения дисперсий. Для перехода к линейным величинам – полуосям эллипса (гиперэллипса для n-мерного пространства), необходимо извлечь квадратный корень.

Рассмотрим эту задачу для двумерного случая, т.е. для плоскости. Физика и геометрия собственных чисел и векторов заключается в том, что результатом умножения исходной матрицы на собственный вектор будет вектор, коллинеарный собственному, по длине отличающийся в число раз, пропорциональное собственному значению. Математически это запишется в виде

$$Nz = p = \lambda z. \qquad (2.26)$$

Поставим численный эксперимент, который прояснит эту запись.

Выполним умножение Nz, где в качестве z будем выбирать единичный вектор с направлением Ψ от 0 до 360°. Формирование компонент единичного вектора выполним по формуле: $z = \begin{pmatrix} \cos\Psi \\ \sin\Psi \end{pmatrix}$.

В качестве примера возьмем матрицу $N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$. (2.27)

В результате умножения матрицы N на z конец вектора p опишет эллипс (рис. 2.4).

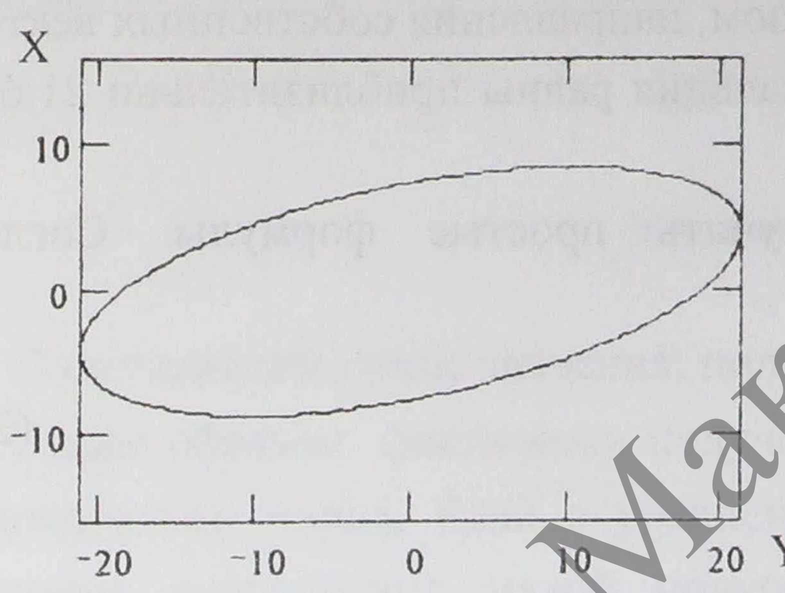


Рис. 2.4. Результат умножения $N \cdot z$

Процедуру умножения можно рассматривать как оператор, преобразующий единичный вектор z. После перемножения вектор изменит направление и длину. Результаты такого перемножения с дискретностью в один градус – компоненты вектора p (значения X и $У$) – приведены в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Ψ	Ψ_1	Y	X	R
0	8,13	21,000	3,000	21,213
1	8,48	21,049	3,139	21,282
2	8,83	21,092	3,277	21,345
3	9,18	21,128	3,415	21,402
4	9,53	21,158	3,551	21,454
5	9,87	21,182	3,686	21,500
6	10,22	21,199	3,820	21,540
7	10,55	21,209	3,953	21,574
8	10,90	21,213	4,084	21,603
9	11,24	21,211	4,215	21,625
10	11,58	21,202	4,344	21,642
11	11,92	21,187	4,471	21,653
12	12,26	21,165	4,598	21,658
13	12,60	21,137	4,723	21,658
14	12,93	21,102	4,846	21,651
15	13,27	21,061	4,968	21,639
…	…	…	…	…
100	95,38	-0,692	7,358	7,390
101	98,30	-1,062	7,281	7,358
102	101,24	-1,432	7,201	7,342
103	104,19	-1,801	7,120	7,344
104	107,13	-2,169	7,037	7,363
105	110,05	-2,537	6,951	7,400
106	112,94	-2,905	6,863	7,453
107	115,72	-3,271	6,113	7,522

В графе «Ψ» указано направление единичного вектора z, в графе «Ψ_1» – направление уже преобразованного вектора p. В графе «R» приведены значения длины вектора p. Из табличных данных видно, что расхождение в направлении вектора z и вектора p – величина переменная, но в районе 12° и 102° эти направления совпадают. Кроме того, им соответствуют максимальное и минимальное значение длины R. Таким образом, направления собственных векторов 12° и 102° – ортогональны. Собственные значения равны приблизительно 21,658 и 7,342 соответственно.

Для двумерного случая можно получить простые формулы. Согласно выражению (2.26), запишем:

$$n_{11}\, z_1 + n_{12}\, z_2 = \lambda z_1;$$
$$n_{21}\, z_1 + n_{22}\, z_2 = \lambda z_2, \qquad (2.28)$$

или

$$(n_{11}-\lambda)z_1 + n_{12}z_2 = 0;$$
$$n_{21}z_1 + (n_{22}-\lambda)z_2 = 0,$$

а также представим в матричном виде:

$$(N - \lambda E)\, z = 0,$$

где $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица.

Формально получаем

$$z = \frac{1}{\mathrm{Det}(N - \lambda E)} \mathrm{adj}(N - \lambda E) \cdot 0;$$

$$\mathrm{Det}(N - \lambda E) z = \mathrm{adj}(N - \lambda E) \cdot 0.$$

Следовательно, $\mathrm{Det}(N - \lambda E)z = 0$.

Так как z – произвольный вектор и, в общем случае ненулевой, то $\mathrm{Det}(N - \lambda E)z = 0$.

Запишем для двумерного случая

$$\mathrm{Det}(N - \lambda E)z = \begin{bmatrix} n_{11} - \lambda & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} - \lambda \end{bmatrix} = 0;$$

$(n_{11} - \lambda)\,(n_{22} - \lambda) - n_{21}\, n_{12} = 0$ – квадратное уравнение. Решая его относительно λ и принимая во внимание, что $n_{21} = n_{12}$ (т.к. матрица N – симметрическая), получим

$$\lambda_{1,2} = \frac{n_{11} + n_{22} \pm \sqrt{(n_{11} - n_{22})^2 + 4n_{12}^2}}{2}. \qquad (2.29)$$

Подставив значения из матрицы (2.27) в выражение (2.29), получим $\lambda_1 = 21{,}659$; $\lambda_2 = 7{,}341$. Таким образом, эти значения практически совпали с максимальным и минимальным значениями, приведенными в табл. 2.1.

Определим ориентацию собственных векторов, соответствующих найденным собственным значениям. Считая λ известным, подставим это значение в уравнения системы (2.28) и решим ее относительно z_1 и z_2, учитывая, что $z_1 = \cos\Psi$, $z_2 = \sin\Psi$.

Первое уравнение системы (2.28) будет выглядеть следующим образом:

$$n_{11} \cos\Psi + n_{12} \sin\Psi = \lambda \cos\Psi.$$

Разделив в первом уравнении левую и правую часть на $\cos\Psi$, получим:

$$n_{11} + n_{12}\, \mathrm{tg}\Psi = \lambda,$$

откуда

$$\mathrm{tg}\Psi = \frac{\lambda - n_{11}}{n_{12}}; \qquad (2.30)$$

$$\Psi = \mathrm{arctg}\frac{\lambda - n_{11}}{n_{12}}. \qquad (2.31)$$

Подставив числовые значения, получим $\Psi = 12{,}388$.

Таким образом, фактически получено направление большой полуоси эллипса Ψ относительно норда. Если в уравнение (2.31) подставить другое значение λ, то получим направление малой полуоси, но поскольку они ортогональны, это, практически, не требуется.

Для отыскания полуосей необходимо извлечь квадратные корни из собственных чисел:

$$a = \sqrt{\lambda_1}; \qquad b = \sqrt{\lambda_2}. \qquad (2.32)$$

Когда говорят об оценке точности, то обычно добавляют слова априорная или апостериорная. Априорная – это оценка точности, выполненная по информации о погрешностях измерений, полученной ранее. Как правило, такая информация о точности измеряемых навигационных параметров основывается на многочисленных статистических исследованиях, которые происходили до конкретной обсервации в каких-либо осредненных условиях. Именно такая информация обычно содержится в ковариационной матрице погрешностей измерений, используемой при расчете координат. В формуле (2.18) она обозначена как D. Если погрешности измерений статистически независимы, то внедиагональные элементы равны нулю и матрица имеет вид

$$D = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix}.$$

Эти погрешности, в соответствии с правилом их переноса, формируют априорную ковариационную матрицу определяемых параметров.

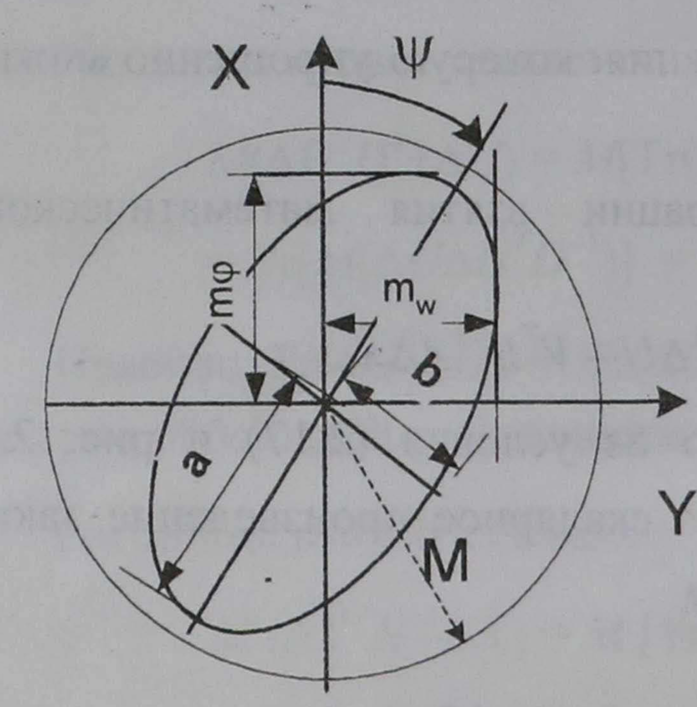


Рис. 2.5. Связь матрицы N с эллипсом погрешностей

Процедура построения эллипса погрешностей по ковариационной матрице сводится к следующим операциям:

- расчету собственных значений λ по формуле (2.29);
- определению угла ориентации Ψ по формуле (2.31);
- расчету полуоси по формулам (2.32).

На рис. 2.5 показана связь между элементами ковариационной матрицы и эллипсом. Отрезок, заключенный между касательной к эллипсу, параллельной оси Y и самой осью, соответствует СКП по широте: $m_\varphi = \sqrt{n_{11}}$. Отрезок на оси Y, отсекаемый вертикальной касательной, соответствует СКП по отшествию: $m_\omega = \sqrt{n_{22}}$.

На рис. 2.5 также показана СКП обсервации M, которая рассчитывается как корень квадратный из следа ковариационной матрицы либо с помощью полуосей эллипса:

$$M = \sqrt{n_{11} + n_{22}} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

2.5. Апостериорная оценка точности рассчитанных координат

21

В априорной оценке использовалась информация о точности, полученная по результатам предыдущих измерений, а в апостериорной оценке участвуют текущие измерения, по которым была вычислена вероятнейшая точка.

Допустим, что ковариационная матрица погрешностей измерений D известна с точностью до постоянного множителя m^2:

$$D = m^2 K;\quad D^{-1} = \frac{1}{m^2} K^{-1};\quad K^{-1} = m^2 D^{-1},$$

где матрица K – известна, а величина m^2 – неизвестна.

Таким образом, известны относительные, а не абсолютные значения матрицы D. С учетом этого рассмотрим систему нормальных уравнений

$$ATD^{-1}A\Delta X = ATD^{-1}\Delta U.$$

Подставив в уравнение вместо D^{-1} выражение $\frac{K^{-1}}{m^2}$, получим

$$\frac{1}{m^2} A^T K^{-1} A\Delta X = \frac{1}{m^2} A^T K^{-1} A\Delta U.$$

Величина m^2 (дисперсия наблюдения с единичным весом) сокращается, и в итоге решение не зависит от абсолютной величины элементов ковариационной матрицы измерений D. Матрицу K^{-1} также называют «весовой» и обозначают через W, а величину m^2 – дисперсией наблюдения с единичным весом. Если m^2 не выносилась из D, то весовой будет просто D^{-1}.

Рассмотрим величину, представляющую собой обобщенную (взвешенную) остаточную сумму квадратов уклонений:

$$M(V^T WV) = M(V^T m^2 D^{-1} V) = m^2\ M(V^T D^{-1} V)\ . \qquad (2.33)$$

Здесь M – операция взятия математического ожидания, которую упрощенно можно рассматривать как отыскание среднего значения.

Рассмотрим выражение $V^T D^{-1} V$ без операции взятия математического ожидания:

$$V^T D^{-1} V = V^T D^{-1}(\Delta U - A\Delta\hat{X}) = V^T D^{-1}\Delta U - V^T D^{-1} A\Delta\hat{X}.$$

Последнее слагаемое равно нулю. Это видно из условия (2.17) и рис. 2.6. Поскольку векторы $V^T D^{-1}$ и $A\Delta\hat{X}$ ортогональны, а скалярное произведение таких векторов равно нулю, то $V^T D^{-1} V - V^T D^{-1}\Delta U$.

Кроме того,

$$V^T D^{-1}\Delta U = (\Delta U^T - \Delta\hat{X}^T A^T)\, D^{-1}\Delta U = \Delta U^T D^{-1}\Delta U - \Delta\hat{X}^T A^T D^{-1}\Delta U.$$

Во втором слагаемом произведение $V^T D^{-1}\Delta U$ представляет собой правую часть системы нормальных уравнений (2.19). Записав вместо нее левую часть этой системы $(A^T D^{-1} A)\Delta\hat{X}$, окончательно получим формулу, по которой можно

рассчитать значение квадратичного критерия (остаточную сумму квадратов невязок):

$$V^T D^{-1} V = V^T D^{-1}\Delta U = \Delta U^T D^{-1}\Delta U - \Delta\hat{X}^T (A^T D^{-1} A)\,\Delta\hat{X} = \Delta U^T D^{-1}\Delta U - \Delta\hat{X}^T N^{-1}\Delta\hat{X}. \quad (2.34)$$

Здесь ΔU – вектор, рассчитанный по исходным данным $U_u - U_c$, и первое слагаемое в правой части дают значение остаточной суммы в начальной (счислимой) точке, а второе – уменьшает это значение за счет смещения к оптимальной точке на величину $\Delta\hat{X}$.

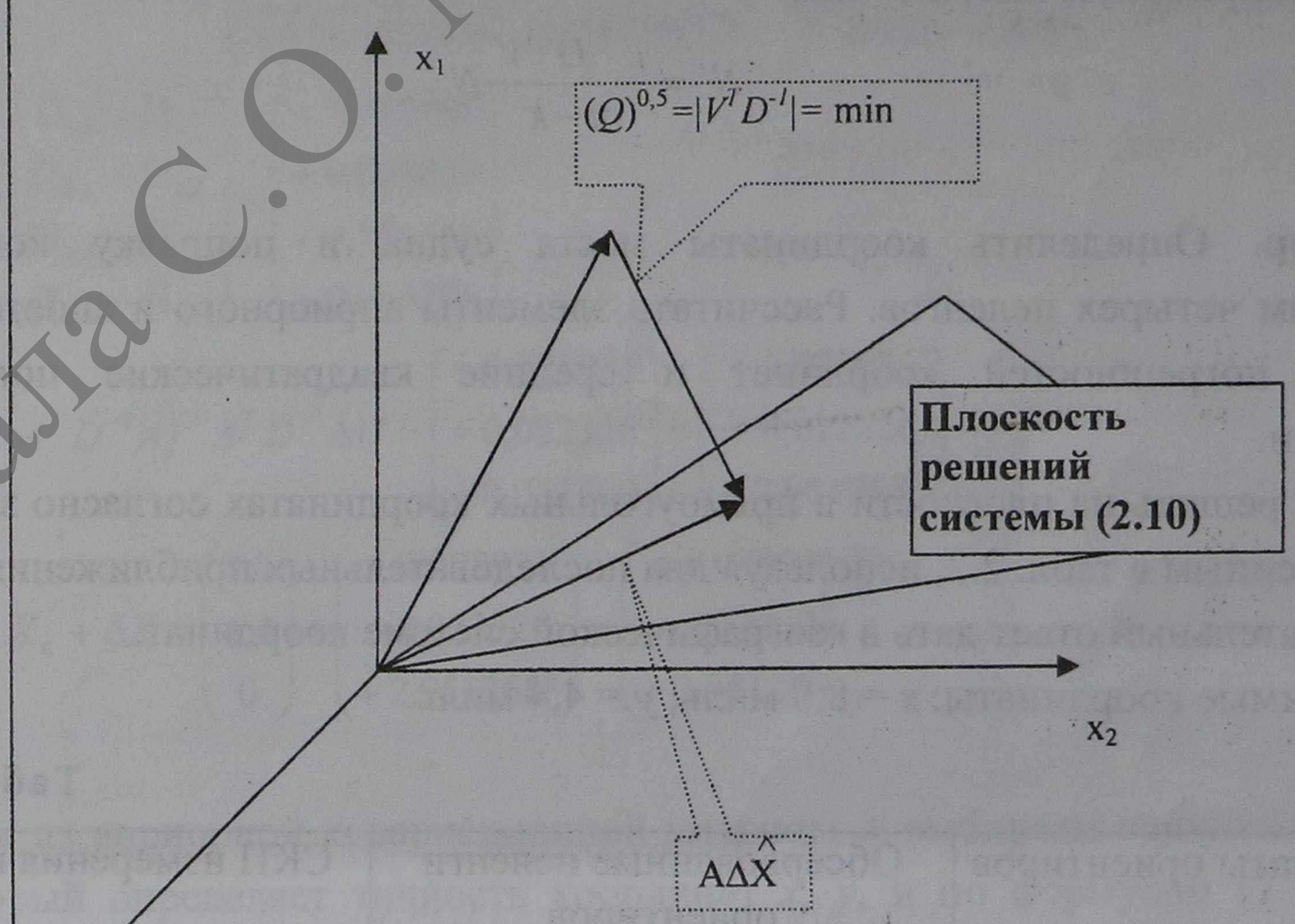


Рис. 2.6. К выводу формулы апостериорной ковариационной матрицы погрешностей координат

С учетом взятия операции математического ожидания (2.33) справедливо выражение

$$m^2 M(V^T D^{-1} V) = M(\Delta U^T D^{-1}\Delta U) - M\,(\Delta\hat{X}^T N^{-1}\Delta\hat{X}). \qquad (2.35)$$

Распишем первое слагаемое:

$$M(\Delta U^T D^{-1}\Delta U) = M[\mathrm{Tr}(\Delta U^T D^{-1}\Delta U)] = M[\mathrm{Tr}(\Delta U\Delta U^T D^{-1})] =$$

$$= \mathrm{Tr}[M(\Delta U\Delta U^T D^{-1})] = \mathrm{Tr}(DD^{-1}) = \mathrm{Tr}(E) = n.$$

Правило $\mathrm{Tr}(\Delta U^T\Delta U) = \mathrm{Tr}(\Delta U\Delta U^T)$ легко проверяется простым перемножением матриц небольшой размерности.

Распишем второе слагаемое:

$$M\,(\Delta\hat{X}^T N^{-1}\Delta\hat{X}) = M\,[\mathrm{Tr}(\Delta\hat{X}^T N^{-1}\Delta\hat{X})] = M\,[\mathrm{Tr}(\Delta\hat{X}\Delta\hat{X}^T N^{-1})] =$$

$$= \mathrm{Tr}[\,M(\Delta\hat{X}\Delta\hat{X}^T N^{-1})] = \mathrm{Tr}(N^{-1}) = \mathrm{Tr}(E) = k.$$

С учетом выражения (2.35) получим

$$M(V^T WV) = m^2(n - k).$$

Несмещенная оценка m^2 запишется в виде выражения

$$m^2 = \frac{V^T W V}{n-k}.$$

Тогда апостериорную оценку ковариационной матрицы погрешности результатов получим следующим образом:

$$N' = (A^T D^{-1} A)^{-1} = \left(A^T \frac{1}{m^2} K^{-1} A\right)^{-1} = m^2 (A^T K^{-1} A)^{-1} = m^2 (A^T P A)^{-1} = \frac{V^T P V}{n-k} (A^T D^{-1} A)^{-1},$$

или апостериорная ковариационная матрица погрешностей координат рассчитывается через априорную матрицу так:

$$N' = \frac{V^T D^{-1} V}{n-k} N. \tag{2.36}$$

Пример. Определить координаты места судна и поправку компаса по измерениям четырех пеленгов. Рассчитать элементы априорного и апостериорного эллипсов погрешностей координат и средние квадратические погрешности обсервации.

Задачу решить на плоскости в прямоугольных координатах согласно значениям, представленным в табл. 2.2, используя два последовательных приближения.

Окончательный ответ дать в географической системе координат.

Счислимые координаты: x = 8,0 миль; y = 4,4 миль.

Таблица 2.2

Координаты ориентиров		Обсервованные пеленги ориентиров	СКП измерения пеленгов
x_{ai}	y_{ai}	П°	m°
16,3	7,9	25,5	0,2
12,0	9,8	56,6	0,2
5,4	11,8	112,6	0,2
14,2	3,0	350,1	0,2

Решение

Первая итерация

1. Запишем навигационную функцию пеленга (1.10) с учетом поправки Z:

$$\Pi = \operatorname{arctg} \frac{x_a - x}{y_a - y} + Z.$$

2. Рассчитаем производные на счислимые координаты $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$, из которых составим матрицу A.

3. По навигационной функции рассчитаем счислимые пеленги по счислимым координатам и координатам навигационных ориентиров, полагая поправку Z=0 на первой итерации.

4. Вычислим вектор свободных членов ΔU, а также вектор $\Delta\hat{X}$, вектор координат $\hat{X}_o$ и ковариационную матрицу погрешностей координат N.

Далее приведены вычисления:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}0431353 & -0{,}102292 & 1 \\ 0{,}119575 & -0{,}088574 & 1 \\ 0{,}120286 & 0{,}0422627 & 1 \\ -0{,}0346535 & -0{,}153465 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Pi_{c1} = +0{,}399061$, $\Pi_{c2} = +0{,}933248$, $\Pi_{c3} = +1{,}908675$, $\Pi_{c4} = +6{,}061103$

N_1

$$N = \left(A^T D^{-1} A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0{,}00179264 & -0{,}00121763 \\ -0{,}00121763 & 0{,}00141187 \end{matrix}} & \begin{matrix} -0{,}000203249 \\ 0{,}000182218 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -0{,}000203249 & 0{,}000182218 \end{matrix} & 2{,}94256e-005 \end{pmatrix}$$

$$\Delta U = \begin{pmatrix} \Pi_{o1} - \Pi_{c1} \\ \Pi_{o2} - \Pi_{c2} \\ \Pi_{o3} - \Pi_{c3} \\ \Pi_{o4} - \Pi_{c4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0{,}045998 \\ +0{,}054609 \\ +0{,}056566 \\ +0{,}049294 \end{pmatrix}$$

$$\Delta\hat{X} = \left(A^T D^{-1} A\right)^{-1} A^T D^{-1} \Delta U = \begin{pmatrix} +0{,}028931 \\ +0{,}022326 \\ +0{,}051509 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0{,}028931 \\ +0{,}022326 \\ +2{,}951268° \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_o = X_c + \Delta X = \begin{pmatrix} 8{,}0 \\ 4{,}4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +0{,}028931 \\ +0{,}022326 \\ +2{,}951268° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +8{,}028931 \\ +4{,}022326 \\ +2{,}951268° \end{pmatrix}$$

Затем из априорной ковариационной матрицы N выбираем верхний левый блок N_1, который определяет точность координат x, y, и по формулам (2.26) – (2.29) находим элементы априорного эллипса погрешностей обсервации и СКП M.

Элементы априорного эллипса погрешностей обсервации из N'

a = 98,6 м; b = 35,6 м; ψ = 139,4°; M = 104,82 м.

Элементы апостериорного эллипса погрешностей обсервации из верхнего левого блока матрицы (2.36)

a = 149,3 м; b = 53,9 м; ψ = 139,4° ; M = 149,30 м.

Вторая итерация

1. Обсервованные координаты принимаем за счислимые, т.е. $X_c = \hat{X}_o$, и повторяем вычисления по формулам (2.20) и (2.26) – (2.29) с расчетом оценки точности координат.

2. Учитывая принятые обозначения, а именно $\Delta\hat{x} = \Delta\hat{\varphi}$, $\Delta\hat{y} = \Delta\hat{w}$, определяем географические координаты при известных географических координатах счислимой точки C (φ_c, λ_c):

$\varphi_o = \varphi_c + \Delta\hat{\varphi}$;

$\lambda_o = \lambda_c + \Delta\hat{w} \cos \varphi_m$, где $\varphi_m = (\varphi_c + \varphi_o)/2$ – средняя широта.

2.6. Графоаналитический расчет

1. На листе миллиметровой бумаги строим систему координат с началом в счислимой точке и выбираем масштаб для прокладки (рис. 2.7).

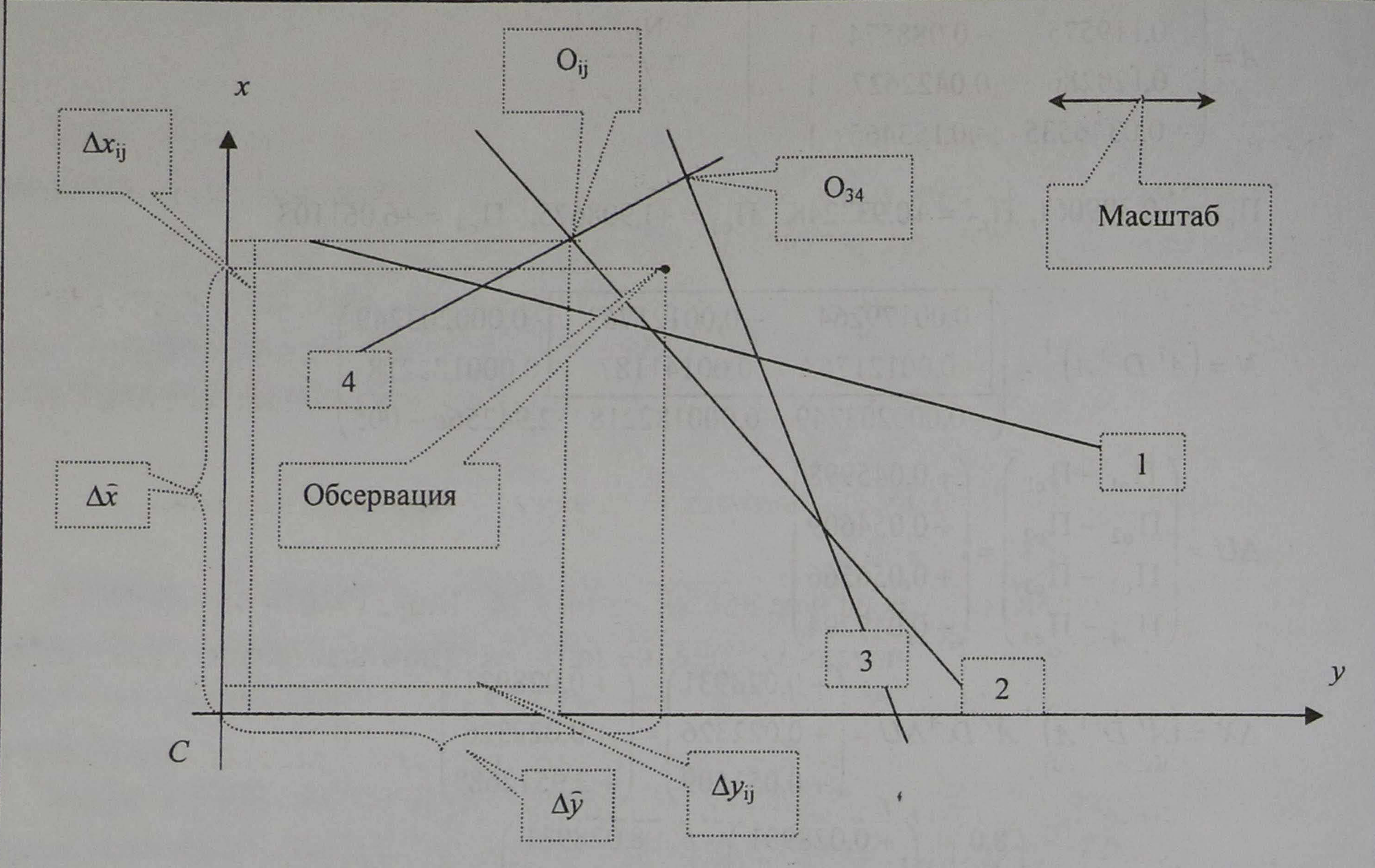


Рис. 2.7. Графоаналитический расчет координат места судна

2. Производим прокладку линий положения, используя формулу $\Delta n_i = \dfrac{\Delta U_i}{g_i}$, и получаем фигуру погрешностей координат.

3. Определяем приращения координат каждой из вершин фигуры погрешностей Δx_{ij}, Δy_{ij}.

4. Каждая точка пересечения двух линий положения O_{ij} имеет вес, который можно рассчитать по следующей формуле:

$$P_{ij} = \frac{1}{M_{ij}^{\ 2}},$$

где M_{ij} – средняя квадратическая погрешность точки по двум линиям положения.

5. Находим средневзвешенное значение приращений координат относительно счислимой точки:

$$\Delta\bar{x} = \frac{\sum P_{ij}\Delta x_{ij}}{\sum P_{ij}}; \Delta\bar{y} = \frac{\sum P_{ij}\Delta y_{ij}}{\sum P_{ij}}.$$

6. Находим обсервованные прямоугольные координаты, используя формулу (2.8), а также географические координаты по формулам, приведенным во второй итерации.

7. Для сравнения ставим точку по первой итерации на диаграмму графоаналитического расчета.

Рекомендуемая литература

Баранов Ю.К., Гаврюк М.И., Логиновский В.А. и др. Навигация: Учебник для вузов. – СПб.: Лань, 1997. – 512 с.

Кожухов В.П., Жухлин А.М., Кондрашихин В.Т. и др. Математические основы судовождения. – М.: Транспорт, 1993. – 200 с.

Груздев Н.М. Оценка точности морского судовождения. – М.: Транспорт, 1989. – 192 с.

Ривкин С.С. и др. Статистическая оптимизация навигационных систем. – Л.: Судостроение, 1976. – 280 с.

Соболев В.И. Информационно-статистическая теория измерений. – М.: Машиностроение, 1983. – 224 с.

Стренг Г. Линейная алгебра и ее приложения. – М.: Мир, 1980. – 454 с.

Лоусон И., Хенсон Р. Численное решение задач методом наименьших квадратов. – М.: Наука, 1986. – 232 с.

Белявский Л.С. и др. Обработка и отображение радионавигационной информации. – М.: Радио и Связь, 1990. – 232 с.

Вульфович Б.А. Методы расчета основных элементов навигационных изолиний. – М.: Пищевая промышленность, 1979. – 145 с.

Кондрашихин В.Т. Определение места судна. – М.: Транспорт, 1989. – 229 с.

Кондрашихин В.Т. Теория ошибок. – М: Транспорт, 1969 – 196 с.

Попеко Г.П., Соломатин Е.П. Навигация. Курс кораблевождения. – Л.: УГС ВМФ, 1961. – Т. 1. – 645 с.

Красавцев Б.И. Мореходная астрономия. – М.: Транспорт, 1986. – 538 с.

Содержание курсовой работы

1. Теоретическая часть.

1.1. Навигационные функции, навигационные параметры и изолинии.

1.2. Прямые аналитические методы расчета координат места судна.

1.3. Линеаризация навигационных функций.

1.4. Расчет координат места судна обобщенным методом линий положения.

1.5. Метод наименьших квадратов в задачах обработки навигационной информации.

1.6. Априорная и апостериорная оценка точности обсервации.

1.7. Графоаналитический вариант расчета координат.

2. Расчетная часть.

2.1. Исходные данные к работе.

2.2. Схема, изображающая навигационные ориентиры и счислимое место судна (в масштабе на листе миллиметровой бумаги формата А4).

2.3. Расчет координат места судна и систематической погрешности измерений Методом наименьших квадратов (две итерации).

2.4. Априорная оценка точности обсервации.

2.5. Апостериорная оценка точности обсервации.

2.6. Схема, изображающая априорный и апостериорный эллипсы погрешностей обсервации для второй итерации (в масштабе на листе миллиметровой бумаги формата А4).

2.7. Расчет координат графоаналитическим способом (в масштабе на листе миллиметровой бумаги формата А4).

Образец титульного листа курсовой работы

Министерство транспорта Российской Федерации

Государственная морская академия
им. адмирала С.О. Макарова

Кафедра судовождения

Курсовая работа на тему
РАСЧЕТ КООРДИНАТ МЕСТА СУДНА ПО ИЗБЫТОЧНЫМ НАВИГАЦИОННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Работу выполнил ______________________
подпись курсанта

Работу проверил ______________________
подпись, уч. звание преподавателя

Санкт-Петербург
200__

СОДЕРЖАНИЕ

Для заметок

Линии положения

как определить по расстоянию

$$g = \sqrt{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

определение градиента

1-простым 1-для линии.

Метод наименьших квадратов

АФАНАСЬЕВ Виктор Викторович
ЛОГИНОВСКИЙ Владимир Александрович

РАСЧЕТ КООРДИНАТ МЕСТА СУДНА ПО ИЗБЫТОЧНЫМ НАВИГАЦИОННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ

Учебное пособие
по математическим основам судовождения

Изд. 2-е, испр.

Ответственный за выпуск — Сатикова Т.Ф.
Редактор — Карамзина Н.А.
Компьютерная верстка — Тюленева Е.И.

Подписано в печать 15.11.2004.
Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс Нью Роман.
Усл. печ. л. 5. Тираж 300 экз. Заказ 340.
ГМА им. адм. С.О. Макарова
199106, Санкт-Петербург, Косая линия, 15-а